שימוש שני לעקרון ההכלה וההדחה

D, R קבוצות סופיות, $|R| = r$ $\quad |D| = d$

$R = \{1, \dots, r\}$ $\quad D = \{1, \dots, d\}$

$$\left|\left\{f : D \longrightarrow R \;\middle|\; \underset{(\mathrm{Im} f = R)}{\text{על } f}\right\}\right| = ?$$

* אם $d < r$ $\quad |A| = 0$

* אם $d = r$ $\quad |A| = d!$

נסמן: $X = \{f : D \longrightarrow R\}$ $\quad |X| = r^d$

ולכל $1 \leq i \leq r$: $A_i = \{f \in X \mid i \in \mathrm{Im} f\}$

$\bigcup_{i=1}^{k} A_i$ - כל הפונקציות שאינן על. $\quad A = X \setminus \bigcup_{i=1}^{k} A_i$

לכל $1 \leq i \leq r$: $\quad |A_i| = (r-1)^d$

לכל $1 \leq i, j \leq r$: $\quad |A_i \cap A_j| = (r-2)^d$

לכל $K \subseteq (1, r)$, $j = |K|$ $\quad |A(K)| = (r-j)^d$

נותרו בדיוק $r-j$ איברים
וזהו מספר הפונקציות מקבוצה
בגודל d לקבוצה בגודל $r-j$

$\Downarrow$

$$\left|X\setminus \bigcup_{i=1}^{r} A_i\right| = \sum_{j=0}^{r} \sum_{\substack{K\subseteq\{1,r\}\\ |K|=j}} (-1)^j |A(K)| = \sum_{j=0}^{r} \sum_{\substack{K\subseteq\{1,r\}\\ |K|=j}} (-1)^j\cdot(r-j)^d =$$

$$= \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j}(-1)^j (r-j)^d$$

שימוש שלישי לעקרון ההכלה וההדחה

לכל $n\in\mathbb{N}$ קיים פירוק יחיד לראשוניים,

כלומר ראשוניים $p_1,\dots,p_m$ $s_1,\dots,s_m\in\mathbb{N}$

כך ש- $n = p_1^{s_1}\cdot p_2^{s_2}\cdot\ldots\cdot p_m^{s_m}$

הגדרה: עבור $m,n\in\mathbb{N}$, נאמר ש- m,n הם **זרים**

אם: $GCD(m,n) = \max\{k\in\mathbb{N} \mid k|m,\ k|n\} = 1$

טענה: אם $k,n\in\mathbb{N}$, אזי מס' הטבעיים בין 1 ל- n

המתחלקים ב- k הוא $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$

כלומר $A = \left|\left\{1\le i\le n \;\middle|\; \begin{matrix} i\in\mathbb{N} \\ k|i \end{matrix}\right\}\right| = \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$

לדוג' $n=14$ $k=3$ $\left\lfloor \frac{14}{3} \right\rfloor = 4$

הסבר: אזי נסמן $l = \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$ $\quad l \le \frac{n}{k}$ הגדול ביותר.

$$A = \{k, 2k, 3k, \dots, lk\}$$

$$lk \le \frac{n}{k} \cdot k = n$$

$$|A| = l = \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$$

שאלה

בהינתן $n \in \mathbb{N}$, כמה מהמספרים $\{1, \dots, n\}$ הם זרים ל-n?

$$\varphi(n) = \left|\{x \in \mathbb{N} \mid x \le n, \ x,n \text{ זרים}\}\right|$$ - פונקציית אוילר

- $\varphi(12) = \left|\{1, 5, 7, 11\}\right| = 4$
- $\varphi(p) = \left|\{1, 2, \dots, p-1\}\right| = p-1$ - p כשראשוני

משפט

עבור $n \in \mathbb{N}$, אם $n = p_1^{s_1} \cdot p_2^{s_2} \cdot \ldots \cdot p_t^{s_t}$

אז
$$\varphi(n) = n \cdot \prod_{i=1}^{t} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

דוגמה:
$$\varphi(12) = 12 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 4$$

הוכחה:

נשים לב כי אם m אינו זר ל- n, אז קיים $1\le i\le t$

כך ש- $p_i | m$,

נגדיר: $X=[n]$, $p_1 \dots p_T$ גורמים ראשוניים של n

לכל $1\le i\le t$ $\quad A_i = \{x\in[n] \mid p_i | x\}$

$$|A_i| = \frac{n}{p_i}$$

לכל $1\le i<j\le n$ $\quad A_i\cap A_j = \{x\in[n] \mid p_i | x,\ p_j | x\} = \{x\in[n] \mid p_i\cdot p_j | x\}$

$$\Downarrow$$

$$|A_i\cap A_j| = \frac{n}{p_i\cdot p_j}$$

ובאופן כללי עבור $K\subseteq\{1,\dots,t\}$:

$$A(K)=\bigcap_{i\in K} A_i = \{x\in[n] \mid \forall_{i\in K}\ p_i | k\} = \{x\in[n] \mid \prod_{i\in K} p_i | k\}$$

$$|A(K)| = \frac{n}{\prod_{i\in K} p_i}$$

כל המספרים אשר זרים ל- n

ע"פ ההגדרות אזי: $\quad \varphi(n) = \left|X\setminus\bigcup_{i=1}^{t} A_i\right|$

$$\Downarrow$$

$$\left|X\setminus\bigcup_{i=1}^{t} A_i\right| = n-\sum_{i=1}^{t}\frac{n}{p_i}+\sum_{1\le i<j\le n}\frac{n}{p_i p_j}-\sum_{1\le k<i\le j\le n}\frac{n}{p_k\cdot p_i\cdot p_j}+\dots+(-1)^j\sum_{\substack{K\subseteq\{1,\dots,t\}\\ |K|=j}}\frac{n}{\prod_{i\in K} p_i} =$$

$$= n \cdot \sum_{j=0}^{n} (-1)^{j} \sum_{\substack{K \subseteq \{1,\dots,t\} \\ |K| = j}} \frac{n}{\prod_{i \in K} p_i} = n \cdot \prod_{i=1}^{t} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) = n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_t}\right)$$

$\blacksquare$