הבהרות המלון של הילברט בצורה פורמלית

דוגמאות:

① $A=\mathbb{N}\cup\{0\}$ בת מניה.

נגדיר $f:\mathbb{N}\to A$, $f(n)=n-1$ לכל $n\in\mathbb{N}$

f חח"ע ועל, לכן $A\sim\mathbb{N}$ ו- A בת מניה. ו- $|A|=\aleph_0$

② $A=\mathbb{N}\times\{0,1\}$ בת מניה.

נגדיר $f:\mathbb{N}\to A$ כך שלכל $n\in\mathbb{N}$

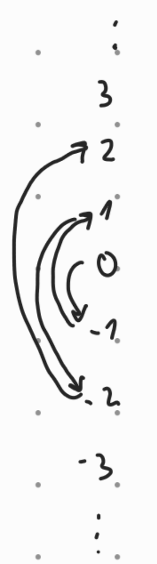
$$f(n)=\begin{cases}\left(\frac{n}{2},1\right) & \text{זוגי } n\\ \left(\frac{n+1}{2},0\right) & \text{אי-זוגי } n\end{cases}$$

f חח"ע ועל $\Leftarrow$ $A\sim\mathbb{N}$ $\Leftarrow$ $|A|=\aleph_0$

③ $A=\mathbb{Z}$ בת מניה.

נגדיר $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ כך:

$$f(n)=\begin{cases}\frac{n}{2} & \text{זוגי } n\\ -\left(\frac{n-1}{2}\right) & \text{אי זוגי } n\end{cases}$$



למה f על?

יהי $m\in\mathbb{Z}$: אם $m>0$ אז קיים $\mathbb{N}\ni n=2m$

שוק $f(2m)=\frac{2m}{2}=m$ סיימנו

אם $m\leq 0$ אז קיים $\mathbb{N}\ni n=-2m+1$

שוק $f(-2m-1)=\frac{2m+1-1}{2}=m$

בדיוק לוגון חח"ע

טענה

נתונה קבוצה A בת מנייה, ונניח $B \subseteq A$.

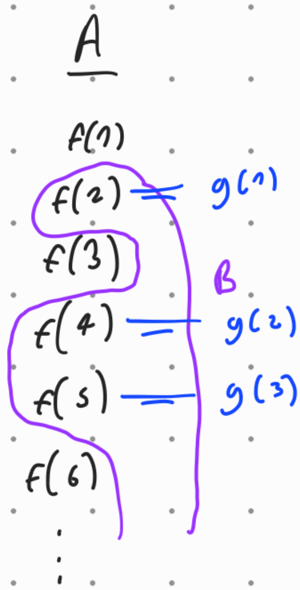
אזי B סופית או בת מנייה.

הוכחה

נניח B לא סופית, נוכיח כי B בת מנייה.

A בת מנייה לכן קיימת $f: \mathbb{N} \to A$ חח"ע ועל.

נגדיר $g: \mathbb{N} \to B$:



$$g(n) = f\left(MIN \left\{ m \in \mathbb{N} \;\middle|\; \begin{array}{l} f(m) \in B \\ \forall i \in [n-1] \\ g(i) \neq f(m) \end{array} \right\}\right)$$

הקבוצה לא ריקה כי B אינסופית.

בדוגמא:

$g(1) = f(2)$

$g(2) = f(\min\{\cancel{2}, 4, 5, \ldots\})$

$\vdots$

g חח"ע ועל $\Leftarrow \mathbb{N} \sim B \Leftarrow |B| = \aleph_0$

למה

אם A בת מנייה, B סופית.

אז $A \cup B$ בת מנייה.

תזכורת: (אם למלון הילברט הגיעו k אורחים, $i \to i+k$ אז התפנו k חדרים.)

הוכחה:

נחלק לשני מקרים:

(I) נניח $A \cap B = \emptyset$, נניח $B = [K]$

קיימות $f: \mathbb{N} \to A$, $g: K \to B$ חח"ע ועל.

נגדיר: $h: \mathbb{N} \to A \dot{\cup} B$

$$h(n) = \begin{cases} g(n) & \text{אם } n \in [k] \\ f(n-k) & \text{אם } n > k \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 \cdots & k & k+1 & k+2 & \cdots \\ \downarrow & & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ g(1) & & & g(k) & f(1) & f(2) & \end{array}$$

h על <u>וחח"ע</u> (כיון השתמשנו בכך ש- $A \cap B = \emptyset$)

(II) אם $A \cap B \neq \emptyset$ אז

$$\boxed{A \cup B = (A \setminus B) \dot{\cup} B}$$

B סופית, $A \setminus B$ לא סופית.

$A \setminus B$ בת מנייה ונחזור למקרה 1. ∎

טענה:

אם A,B בנות מנ"ה, אז $A\cup B$ בת מנ"ה.

הוכחה:

נחלק לשני מקרים:

(I) נניח $A\cap B=\emptyset$

מהנתון קיימות $f:\mathbb{N}\to A$ $g:\mathbb{N}\to B$ חח"ע ועל.

נגדיר $h:\mathbb{N}\to A\cup B$ ע"י:

$$h(n)=\begin{cases} f\left(\frac{n+1}{2}\right) & \text{אם } n \text{ אי"ז} \\ g\left(\frac{n}{2}\right) & \text{אם } n \text{ זוגי} \end{cases}$$

h חח"ע ועל $\Leftarrow$ $A\cup B\sim\mathbb{N}$ $\Leftarrow$ $|A\cup B|=\aleph_0$

(II) אם $A\cap B\neq\emptyset$:

$$A\cup B=(A\setminus B)\dot{\cup}B$$

אם $A\setminus B$ סופית אז מטענה קודמת האיחוד בן מנ"ה.

אם $A\setminus B$ בת מנ"ה אז מכיוון ש- $(A\setminus B)\cap B=\emptyset$

ממקרה I נקבל שהאיחוד בן מנ"ה.

מסקנות:

1. אם $A_1,\dots,A_n$ קבוצות בנות מנייה, אז גם $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ בן מנייה.

2. אם $A_1,\dots,A_n$ קבוצות כך שכל אחת סופית או בת מנייה. אז גם $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ סופית או בת מנייה.

הוכחה (2:1)

אם כל A_i סופיות $\Leftarrow$ $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ סופי.

אם קיימת A_i בת מנייה, נחשוב עליה בתור הקבוצה הקב' הראשונה, ושאר באינדוקציה כל קבוצה שנאחד תשאיר אותנו עם קבוצה בת מנייה.

שאלה?

אם ניקח אוסף אינסופי של קבוצות בנות מנייה, אז האיחוד שלהם בן מנייה?

כלומר סדרה של קבוצות $A_1, A_2, \dots$ כך שכל A_i בת מנייה.

או סופית, אז $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{a \mid \exists i\in\mathbb{N},\ a\in A_i\}$ בן מנייה או סופי?

טענה:

$\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ בת מנייה.

הוכחה:

המטרה: להציג $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ חח"ע ועל.

	1	2	3	4	5	6	...
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)	
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)	
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)	
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)	
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)	
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)	
⋮							

$1 \leftrightarrow (1,1)$

$2 \leftrightarrow (2,1)$ $\quad 3 \leftrightarrow (1,2)$

$4 \leftrightarrow (3,1)$ $\quad 5 \leftrightarrow (2,2)$ $\quad 6 \leftrightarrow (1,3)$

סכומי האלכסונים הקודמים.

$$f((5,1)) = (1+2+3+4)+1 = (1+2+\dots+(5+1-2))+1$$

נציג: $f((m,n)) = (1+2+\dots+(m+n-2))+n$

f חח"ע ועל $\Leftarrow$ $\mathbb{N}\sim\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ $\Leftarrow$ $|\mathbb{N}\times\mathbb{N}|=\aleph_0$