הערך המוחלט

הגדרה: יהי $\mathbb{F}$ שדה סדור. לכל $a \in \mathbb{F}$ נגדיר:

$$|a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

טענה:

לכל $a \in \mathbb{F}$ מתקיים $|a| \geq 0$,

וגם $|a| = 0$ אמ"מ $a = 0$.

הוכחה:

יהי $a \in \mathbb{F}$.

אם $a \geq 0$ אז $|a| = a \geq 0$

אם $a < 0$ אז $|a| = (-a) > 0$

$a = 0 \Rightarrow |a| = 0$ (מהגדרה)

צ"ל: $|a| = 0 \Rightarrow a = 0$

נוכיח את השלילה: $a \neq 0 \Rightarrow |a| \neq 0$

שני מקרים:

$a > 0 \Rightarrow |a| = a > 0$

$a < 0 \Rightarrow |a| = (-a) > 0$

(טענה:

לכל $a \in \mathbb{F}$ מתקיים $|a| = |(-a)|$

הוכחה:

נניח $a \geq 0 \Rightarrow (-a) \leq 0$

ולכן $|a| = a = -(-a) = |(-a)|$

ואחרת $a < 0 \Rightarrow (-a) > 0$

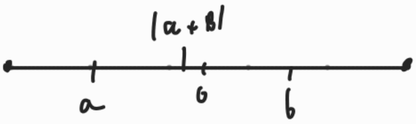
אז $|a| = -a = |(-a)|$

(טענה:

לכל $a, b \in \mathbb{F}$ $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

הוכחה:

בתרגול (☹) אין לנו (☺)



משפט אי שוויון המשולש

לכל $a,b\in\mathbb{F}$ $\quad |a+b|\le|a|+|b|$

למה 1:

יהיו $p,q\in\mathbb{F}$, $q\ge 0$ אז $|p|\le q$ אמ"מ:

$$-q\le p\le q$$

הוכחת למה 1:

• כיוון ראשון: נתון $|p|\le q \Rightarrow -q\le -|p|$

אם $p\ge 0$ אז $-p<0\le p=|p|\le q$

ואם $p<0$ אז $-q\le -|p|=-(-p)=p<0<q$

• כיוון שני: נתון $-q\le p\le q$

אם $p\ge 0$ אז $|p|=p\le q$

אם $p<0$ אז $|p|=-p\le q$

מסקנה:

לכל $a\in\mathbb{F}$; $\quad -|a|\le a\le |a|$

הוכחת אי שוויון המשולש

יהיו $a,b \in \mathbb{F}$. הכרנו ש- $|-a| \le a \le |a|$

$$|-b| \le b \le |b|$$

$$-|a| + (-|b|) \le a+b \le |a|+|b|$$

ולכן, מהלמה (כאשר $p = a+b$, $q = |a|+|b|$):

$$|a+b| \le |a| + |b|$$

מש"ל.

הערה: מאי שוויון המשולש נובע:

$$|a-b| = |a+(-b)| \le |a| + |-b| = |a| + |b|$$

טענה - א"ש משולש הפוך

לכל $a,b \in \mathbb{F}$ $\quad ||a|-|b|| \le |a-b|$

הוכחה:

ראינו לכל $a,c \in \mathbb{F}$: $\quad |a-c| \le |a| + |c|$

נציב $c = a-b$: $\quad |b| \le |a| + |a-b|$

$$|b| - |a| \le |a-b|$$

נחליף תכ' קיצונית: $-(|b|-|a|) = |a|-|b| \le |b-a| = |a-b| \;/\cdot(-1)$

$$-|a-b| \le |b|-|a| \le |a-b|$$

ומ בלמר: $$\big||a|-|b|\big| \le |a-b|$$

מש״ל.