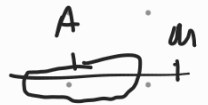


## הגדרה:

יהי  $\mathbb{F}$  סדור,  $A \subseteq \mathbb{F}$  קבוצה לא ריקה.

• נאמר  $A$  חסומה מעיל אם קיים  $M \in \mathbb{F}$



כך  $a \leq M$  לכל  $a \in A$ .

• נאמר  $A$  חסומה מלכל אם קיים  $m \in \mathbb{F}$



כך  $a \geq m$  לכל  $a \in A$ .

•  $M$  יקרא חסם מעיל של  $A$ .

•  $m$  יקרא חסם מלכל של  $A$ .

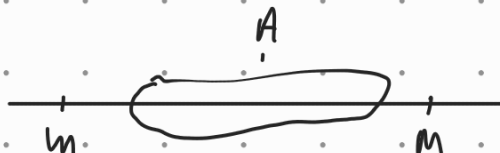
•  $A$  תקיפה חסומה אם היא חסומה מעיל וחסם מלכל.

## לדוגמה

$A \subseteq \mathbb{F}$  עדינה, ריקה, חסומה, או חסומה.

$$|A| = \{ |a| \mid a \in A \}$$

## הוכחה



כאן: נניח  $A$  חסומה, כלומר קיימים  $M \in \mathbb{F}$ ,  $m \in \mathbb{F}$

$$\text{כך } a \in A \text{ לכל } \begin{cases} a \leq M \\ a \geq m \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$-a \leq -m$$

$\Leftrightarrow$

$$a \leq \max(M, -m)$$

$$-a \leq \max(M, -m)$$

$\Leftrightarrow$

$$a \in A \quad \Leftrightarrow \quad |a| \leq \max(M, -m)$$

$$\int_{\mathbb{R}} |f| \, d\mu < \infty \quad \Leftrightarrow \quad |f| \in L^1(\mathbb{R})$$

$$a \in A \quad \Leftrightarrow \quad |a| \leq M \quad \Leftrightarrow \quad M \in \mathbb{R}^+ \quad \text{דיון:}$$

$$a \in A \quad \Leftrightarrow \quad -M \leq a \leq M$$

$$A$$

$$a < b \quad \Leftrightarrow \quad \text{דיון:}$$

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \quad \text{דיון:}$$

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} \quad \text{דיון:}$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

$$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\} \quad [a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$$

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\} \quad [-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$$

הערה: - המילה טוינסוף לא הוצגה.

לפי הטענה  $(a, b]$   $[-\infty, a]$

לענה

לפי קיים טיפוס אחד שבו חסר מעלה  $\mathbb{N}$ .

הוכחה

נניח נבחר קיים טיפוס, כזה, נסמן טיפוס  $K$  כזה.  $K < K+1 \in \mathbb{N}$

$$K < K+1 \in \mathbb{N}$$

לענה

לפי קיים טיפוס, נבחר טיפוס, חסר מעלה  $\mathbb{N}$ .

הוכחה

נניח נבחר קיים טיפוס, כזה,  $\frac{p}{q}$   $\frac{p}{q} = \frac{p}{q}$   $q \in \mathbb{N}$   $p \in \mathbb{N}$

$$q \leq q \text{ ולכן } q^{-1} \leq 1 \text{ ולכן } 0 \leq q^{-1}$$

$$r = p \cdot q^{-1} \leq p < p+1 \in \mathbb{N}$$

סיכום: קיימים שברים סדורים  $\mathbb{N}$  היטב

קבוצה חסומה מוגבלת.  $WTIF?$

## הגדרה:

לבה סבוכ יקרא טרכימי אם  $\forall$  אינה

חסומה  $\int_1^\infty \frac{1}{x} dx$

## לדוגמה

יהי  $\forall$  סבוכ טרכימי, אינה  $\int_1^\infty \frac{1}{x} dx$

קיים  $n \in \mathbb{N}$  כך  $\frac{1}{n} < \epsilon$

## הוכחה

מכיוון  $\forall$  טרכימי,  $\frac{1}{\epsilon}$  אינו חסם עליון  $\forall$

לכן קיים  $n \in \mathbb{N}$  כך  $\frac{1}{n} < \epsilon$   $\Leftrightarrow n > \frac{1}{\epsilon}$

## לדוגמה

לכן  $0 < x, y$  קיים  $n \in \mathbb{N}$  כך  $n \cdot x > y$

## הוכחה

מתבונן הטרכימי  $\frac{y}{x}$  קיים  $n \in \mathbb{N}$   $\frac{y}{x} < n$   $\Leftrightarrow n \cdot x > y$

$$\text{Even} = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N}, n = 2k\}$$

## סיומ:

$$\text{Odd} = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N}, n = 2k-1\}$$

לדוגמה

$$\text{Even} \cap \text{Odd} = \emptyset \quad (i)$$

$$\begin{aligned} n+1 \in \text{Odd} &\Leftrightarrow n \in \text{Even} \\ n+1 \in \text{Even} &\Leftrightarrow n \in \text{Odd} \end{aligned} \quad (ii)$$

$$1 \in \text{Odd} \quad (iii)$$

$$\text{Even} \cup \text{Odd} = \mathbb{N} \quad (iv)$$

$$m \cdot n = 4k \quad \text{כאשר } m, n \in \text{Even} \quad \text{אז } k \in \mathbb{N} \quad (v)$$

$$m \cdot n \in \text{Odd} \quad \text{אז } m, n \in \text{Odd} \quad (vi)$$

לדוגמה

$$n \in \mathbb{Q} \quad \text{אז } n \text{ הוא מספר רציונלי}$$

$$r^2 = 2 \quad \text{כאשר } r \in \mathbb{Q}$$

הוכחה (משפט 1.1)

$$r^2 = 2 \quad \text{כאשר } r \in \mathbb{Q}$$

$$r > 0 \quad \text{אז } r \text{ הוא מספר רציונלי}$$

$$r = \frac{m}{n} \quad \text{כאשר } m, n \in \mathbb{N}$$

$$r \text{ הוא מספר רציונלי}$$

למעשה,  $m, n$  הם מספרים טבעיים כך ש- $\frac{m}{n} = \sqrt{2}$  (הנחה)

לכן:

$$\frac{m^2}{n^2} = \left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2 \Rightarrow m^2 = 2 \cdot n^2 \Rightarrow m^2 \text{ זוגי} \Rightarrow m \text{ זוגי}$$

נניח  $m = 2k$  (כך ש- $m^2 = 4k^2$ ).

$$4k^2 = 2n^2 \Rightarrow 2k^2 = n^2 \Rightarrow n^2 \text{ זוגי} \Rightarrow n \text{ זוגי}$$

לכן,  $m, n$  שניהם זוגיים. נניח  $m = 2k$  ו- $n = 2l$  (הנחה).

ט' כוונת:

הקבוצה  $\{a + \sqrt{2} \cdot b \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$  היא כמעט כל המספרים.

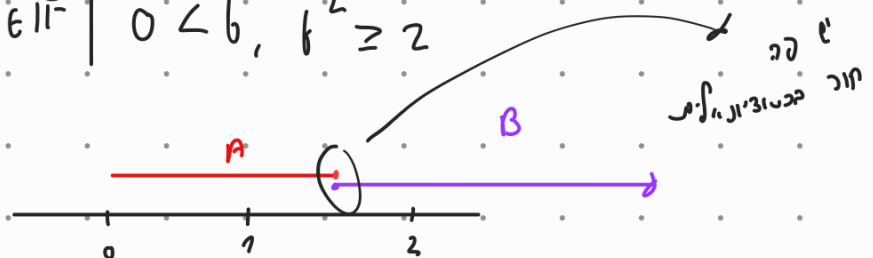
$$(\sqrt{2})^2 = 2 \quad \text{המקור}$$

המשפט:

יהי  $\mathbb{F}$  שדה.

$$A = \{a \in \mathbb{F} \mid 0 < a, a^2 \leq 2\}$$

$$B = \{a \in \mathbb{F} \mid 0 < a, a^2 \geq 2\}$$



אם  $a \in A$  ו- $b \in B$  אז  $a \leq b$  (המשפט).

הנכחה:  $0 < a, b$  - נתון.

$$a^2 \leq 2 \leq b^2 \Rightarrow a^2 \leq b^2 \Rightarrow a \leq b$$

הצגה: עבור  $\mathbb{F}$  ישר, הערך  $a \leq b$  נקרא סדר  $a \leq b$  אם  $a \leq b$  ורק אם  $a \leq b$ .

הערה:  $A, B \subseteq \mathbb{F}$  הם קבוצות המסומנות  $a \leq b$  ורק אם  $a \leq b$ .

$a \in A$  ורק אם  $a \in B$ , קיים  $c \in \mathbb{F}$  כך  $a \leq c \leq b$ .

לכן  $a \in A$  ורק אם  $a \in B$ .

משפט:  $3$

יהי  $\mathbb{F}$  שדה סדור, נניח  $[1, 3]$  הוא קבוצה

המסומנת  $a \leq b$  ורק אם  $a \leq b$ . נניח  $a \leq b$  ורק אם  $a \leq b$ .

הצגה:  $A \subseteq \mathbb{F}$  היא קבוצה של

$M \in \mathbb{F}$  ישר, הערך  $a \leq b$  ורק אם  $a \leq b$ .

(1)  $A$  היא קבוצה מסומנת  $a \leq b$  ורק אם  $a \leq b$ .

(2)  $M \leq M'$  ורק אם  $M \leq M'$  ורק אם  $M \leq M'$ .

$M = \sup A$  ורק אם  $M = \sup A$ .

$M \in F$  יקרא החסם התחתון / טורינפיון  $\inf A$  ואם:

(1) הוא חסם מלכס  $A$ .

(2) אם  $M' \leq M$  ואם  $M'$  גם חסם תחתון  $A$ , אז  $M' = M$ .

אזכור  $M = \inf A$

לדוגמה

מביט  $A \subseteq \mathbb{R}$  לא ריקה, ואם קיים  $A$  חסם עליון

הוא וחיב.

הוכחה

אם  $M, M'$  חסמים תחתונים  $A$ , אז  $M \geq M'$  או  $M' \geq M$  (בכך שניהם

חסמים מלכס). אז  $M' \geq M$  ואם  $M \geq M'$  ולכן  $M = M'$ .

דוגמאות:

| קטגוריה                                     | חסם עליון | טורינפיון |
|---------------------------------------------|-----------|-----------|
| $[-5, 15]$                                  | 15        | 15        |
| $[-5, 15)$                                  | 15        | 15        |
| $[-5, 15] \cup \{20\}$                      | 20        | 20        |
| $(-5, 15) \cup (17, 18)$                    | 18        | 18        |
| $[-5, \infty)$                              | $\infty$  | $\infty$  |
| $\{x - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ | 1         | 1         |

הערה:

חסם עליון לא חייב להיות

טורינפיון. דוגמה: חסם עליון  $A$ .

תהיה  $A \subseteq \mathbb{R}$  קבוצה לא ריקה.

•  $M$  יקרא המקסימום של  $A$  אם:

$$M \in A \quad (1)$$

$$A \subseteq (-\infty, M] \quad (2)$$

$$M = \max A \quad \text{נאמר}$$

•  $M$  יקרא המינימום של  $A$  אם:

$$M \in A \quad (1)$$

$$A \subseteq [M, \infty) \quad (2)$$

$$M = \min A \quad \text{נאמר}$$