למה

יהיו $A,B\subseteq \mathbb{R}$ לא ריקות כך ש- $a\leq b$ לכל $a\in A$, $b\in B$

אזי: $\sup(A)\leq \inf(B)$

הוכחה

נטען תחילה ש- $\sup(A)$, $\inf(B)$ קיימים, כי לכל $a\in A$

הוא חסם מלרע של B, B לא ריקה + חסומה מלרע

ולכן בגלל ש- $\mathbb{R}$ שלם קיים $\inf(B)$. (ובדומה קיים $\sup(A)$.)

נניח בשלילה ש- $\sup A > \inf B$. מהיות $\inf(B)$ חסם מלרע מקסימלי של B.

נובע ש- $\sup A$ אינו חסם מלרע של B, כלומר קיים $b\in B$

כך ש- $b<\sup A$. מהיות $\sup A$ חסם מלעיל מינימלי של A,

נובע ש- b אינו חסם מלעיל של A, כלומר קיים $a\in A$

כך ש- $a>b$ בסתירה.

למת החתכים

יהיו $A,B \subseteq \mathbb{R}$ לא ריקות כך ש- $a \le b$ לכל $a\in A$, $b \in B$

אזי הטענות הבאות שקולות: (אומ"ע)

1. קיים $M \in \mathbb{R}$ יחיד כך ש- $a \le M \le b$. לכל $a \in A$, $b \in B$
2. $\inf(B) = \sup(A)$
3. לכל $0 < \varepsilon$ קיימים $a \in A$, $b \in B$ כך ש- $b - a < \varepsilon$

הוכחה

$(1) \Rightarrow (2)$: נניח בשלילה ש- $\sup A \neq \inf B$. מהלמה הקודמת

$\sup A < \inf B$. נתבונן ב-
$$\sup A < \tfrac{1}{3}\sup A + \tfrac{2}{3}\inf B < \inf B$$
$$\sup A < \tfrac{2}{3}\sup A + \tfrac{1}{3}\inf B < \inf B$$

בסתירה ל- 1.

$(2) \Rightarrow (3)$: יהא $0 < \varepsilon$. מאפיון שקיים $a \in A$ כך ש- $a > \sup A - \frac{\varepsilon}{2}$

ומאפיון שקיים $b \in B$ כך ש- $b < \inf B + \frac{\varepsilon}{2}$. ולכן:

$$b - a < \left(\inf B + \tfrac{\varepsilon}{2}\right) - \left(\sup A - \tfrac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon$$

$(3) \Rightarrow (1)$: נניח בשלילה שקיימים $M_1 < M_2$ בה"כ כך שלכל $a \in A$, $b \in B$

$a \le M_1 < M_2 \le b$. כלומר לכל $b \in B$, $a \in A$: $b \ge M_2$, $a \ge M_1$

ולכן $b - a \ge M_2 - M_1 > 0$ בסתירה ל- 3.