הגדרה: יהי $x>0$, $n\in\mathbb{N}$, $y\in\mathbb{R}$. נאמר ש-y הוא

השורש ה-n-י של x אם: $y>0 \wedge y^n = 0$

מוגדר אך ורק לחיוביים.

סימון: נסמן את השורש ה-n-י של x ב-$x^{\frac{1}{n}}$

או ב- $\sqrt[n]{x}$

משפט

לכל $x>0$ ($x\in\mathbb{R}$), $n\in\mathbb{N}$ קיים $y>0$ יחיד המקיים $y^n=x$

והוא $\sup\{z\geq 0 \mid z^n<x\}$

הוכחה

יחידות:

אם $a,b>0$ ומקיימים $a^n=x$, $b^n=x$ ולכן $a^n=b^n$ ולכן $a=b$

קיום:

נגדיר $S=\{z\geq 0 \mid z^n<x\}$

אם $0<x<1$, נסתכל על $y=1$.

אחרת $1\leq x$ נסתכל על $y=x^n$

אז y חסם מלעיל של S, כי $z^n<x<y$ לכל $z\in S$.

ניקח $y=$ החסם מלעיל המינימלי

AKA חסם עליון

מתקיים $0 < \frac{x}{1+y} < x$ ולכן $y > 0$

נניח בשלילה ש- $y^n < x$, אז נבחר $0 < \varepsilon < 1$ המקיים

$\varepsilon < \frac{1 - y^n/x}{n}$. אז מאי-שוויון ברנולי,

$$\left(\frac{y}{1-\varepsilon}\right)^n = \frac{y^n}{(1-\varepsilon)^n} \le \frac{y^n}{1-n\cdot\varepsilon} < \frac{y^n}{y^n/x} = x$$

אז $y \ge y^n \in S$ בסתירה להיות y חסם מלעיל.

נניח בשלילה ש- $x < y^n$.

נמצא $0 < \varepsilon < 1$ כך ש $\left(y\cdot(1-\varepsilon)\right)^n > x$ (ואז תהיה סתירה לחסימה.)

$$\Updownarrow$$

$$y^n(1-\varepsilon)^n > x$$

$$\Updownarrow$$

$$(1-\varepsilon)^n > \frac{x}{y^n}$$

ולכן מספיק להשתמש ב- $\varepsilon < \frac{1 - x/y^n}{n}$

ולכן $\frac{x}{y^n} < 1 - n\cdot\varepsilon$

ומאי-שוויון ברנולי:

$$\left(y(1-\varepsilon)\right)^n = y^n(1-\varepsilon)^n \ge y^n(1-n\varepsilon) > y^n\cdot\frac{x}{y^n} = x$$

ולכן $y(1-\varepsilon)$ הוא חסם מלעיל של S שקטן מ- y, בסתירה.

לכן מטריכוטומיה $y^n = x$.

חזקות עם מעריך רציונלי:

הגדרה: יהי $0<x\in\mathbb{R}$, ו- $r\in\mathbb{Q}$, אז: $x^r=(x^m)^{\frac{1}{n}}$

כאשר $m\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{N}$ ו- $\frac{m}{n}=r$

הערה

אם $a,c\in\mathbb{Z}$ ו- $b,d\in\mathbb{N}$ כך ש- $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

אז: לכל $0<x$ מתקיים $(x^a)^{1/b}=(x^c)^{1/d}$

הוכחה

ראינו ש- $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow ad=bc$

$$\left((x^a)^{\frac{1}{b}}\right)^{bd}=\left(\left((x^a)^{\frac{1}{b}}\right)^{b}\right)^{d}=x^{ad}=x^{bc}=(x^c)^{b}=\left(\left((x^c)^{\frac{1}{d}}\right)^{d}\right)^{b}=\left((x^c)^{\frac{1}{d}}\right)^{bd}$$

ולכן $(x^a)^{\frac{1}{b}}=(x^c)^{\frac{1}{d}}$

עשינו שימוש בחוקי חזקות עם מעריכים שלמים והמשפט $a^n=b^n \Rightarrow a=b$ עבור $n\in\mathbb{N}$

משפט

אם $x,y>0$ ו- $r,s\in\mathbb{Q}$, אז:

1. $x^r\cdot x^s=x^{r+s}$
2. $(x^r)^s=x^{r\cdot s}$

3) $x^r \cdot y^r = (xy)^r$

4) אם $x<y$ ו- $r>0$ אז $x^r<y^r$

5) אם $x<y$ ו- $r<0$ אז $x^r>y^r$

6) אם $1<x$ ו- $r<s$ אז $x^r<x^s$

7) אם $0<x<1$ ו- $r<s$ אז $x^r>x^s$

הוכחה ל- (1)

נניח $r=\frac{a}{b}$, $s=\frac{c}{d}$ אז:

$$\left(x^{\frac{a}{b}}\cdot x^{\frac{c}{d}}\right)^{bd}=\left(x^{\frac{a}{b}}\right)^{b\cdot d}\cdot\left(x^{\frac{c}{d}}\right)^{b\cdot d}=\left(\left(\left(x^{a}\right)^{\frac{1}{b}}\right)^{b}\right)^{d}\cdot\left(\left(\left(x^{c}\right)^{\frac{1}{d}}\right)^{d}\right)^{b}=$$

$$=\left(x^{a}\right)^{d}\cdot\left(x^{c}\right)^{b}=x^{ad}\cdot x^{bc}=x^{ad+bc}=\left(x^{\frac{ad+bc}{bd}}\right)^{bd}$$

ולכן $x^r\cdot x^s=x^{\frac{a}{b}}\cdot x^{\frac{c}{d}}=x^{\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}}=x^{r+s}$

הגדרה: יהי $x\in\mathbb{R}$, סביבה של x היא קטע פתוח שמכיל את x, כלומר כל קטע (a,b) כך ש- $a<x<b$.

הגדרה: יהי $x\in\mathbb{R}$, סביבה מנוקבת של x היא קבוצה $(a,b)\setminus\{x\}$ כך ש- $a<x<b$.

$(a,x)\cup(x,b)$