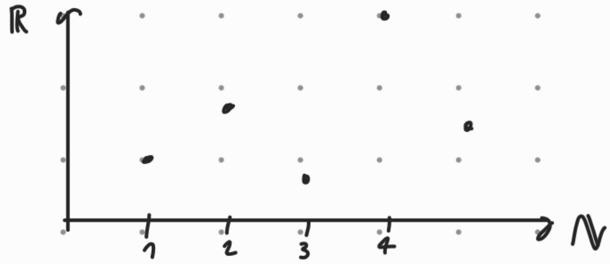
סדרות (של מספרים ממשיים)

הגדרה: סדרה (של מספרים ממשיים) היא פונקציה מהטבעיים לממשיים.



• נסמן a_n = האיבר ה- n בסדרה.

האינדקס

• נסמן את הסדרה ב- $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ / $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ / (a_n)

איך מגדירים סדרה כלשהי?

• נוסחה לאיבר.

• הגדרה רקורסיבית. (נוסחאות נסיגה)

דוגמאות:

1. הסדרה הקבועה: (a_n) $\forall n\in\mathbb{N},\ a_n=5$

2. סדרת הטבעיים: (b_n) $\forall n\in\mathbb{N},\ b_n=n$

3. $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $c_n=-1^n$

4. הסדרה ההרמונית: $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\forall k\in\mathbb{N},\ d_k=\frac{1}{k}$

(5) סדרת הראשוניים: (e_n), לכל $n \in \mathbb{N}$, e_n הוא המספר הראשוני ה-n.

(6) סדרת הספרות בפיתוח העשרוני של π: (f_n), $f_1 = 3$, $f_2 = 1$, $f_3 = 4$,

(7) סדרת פיבונאצ'י, (g_n), $g_1 = 1$ $g_2 = 1$, $g_n = g_{n-1} + g_{n-2}$ לכל $n \geq 3$

הערה:

תהא (a_n) סדרה, יש קבוצת האיברים שלה היינו:

$\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, בקבוצה אין סדר ואין חזרות.

הגדרה: יהא $a \in \mathbb{R}$ ויהא $\varepsilon > 0$, נגדיר סביבה אפסילונית.

$$B_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-a| < \varepsilon\}$$

הגדרה: תהא $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ סדרה של פסוקים לוגיים, נאמר ש-(P_n) מתקיימת, מ-n מסוים והלאה, אם קיים $N \in \mathbb{N}$ כך ש-$P_n = \text{True}$ לכל $n > N$.

הגדרה: תהא (a_n) סדרה, נאמר שהגבול של הסדרה הוא L, אם לכל $\varepsilon > 0$ $a_n \in B_\varepsilon(L)$ מ-n מסוים והלאה.

(כלומר לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ $|a_n - L| < \varepsilon$)

ונסמן $\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = L}$ או $\boxed{a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L}$

דוגמאות:

(1) הסדרה $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ כאשר $a_n=\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$. אזי אזן

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)=\alpha$ יהי $0<\varepsilon$, נבחר $N=1$. אז לכל $n>N$ מתקיים:

$$|a_n-\alpha|=|\alpha-\alpha|=0<\varepsilon$$

(2) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ הסדרה ההרמונית: $\forall n\in\mathbb{N},\ a_n=\frac{1}{n}$

יהי $0<\varepsilon$, אז ניקח $N=\left\lceil\frac{1}{\varepsilon}\right\rceil$ לכל $n>N$ מתקיים:

$$|a_n-0|=\left|\frac{1}{n}\right|=\frac{1}{n}<\frac{1}{N}=\frac{1}{\left\lceil\frac{1}{\varepsilon}\right\rceil}<\frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}}=\varepsilon$$

(3) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ כך ש- $a_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

$\boxed{\text{טיוטה:}}$

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\overset{\text{צריך להיות}}{<}\varepsilon$$

$$\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\frac{1}{2\sqrt{n}}\overset{\text{צריך להיות}}{<}\varepsilon$$

אז מזה צריך ש- $n>\frac{1}{4\varepsilon^2}$

יהי $0<\varepsilon$, אז נבחר $N=\left\lceil\frac{1}{4\varepsilon^2}\right\rceil$ אז לכל $n>N$

$$|a_n-0|=|a_n|=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<$$

$$<\frac{1}{2\sqrt{n}}<\frac{1}{2\sqrt{N}}=\frac{1}{2\sqrt{\left\lceil\frac{1}{4\varepsilon^2}\right\rceil}}\leq\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{4\varepsilon^2}}}=\varepsilon$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n)=0$$

4) (a_n) , $a_n = \dfrac{3n^3+7n^2+1}{4n^3-8n+63}$ נוכיח כי $\lim_{n\to\infty}(a_n) = \dfrac{3}{4}$

טיוטה!

$$\left|\frac{3n^3+7n^2+1}{4n^3-8n+63}-\frac{3}{4}\right| = \left|\frac{4(3n^3+7n^2+1)-3(4n^3-8n+63)}{4(4n^3-8n+63)}\right| = \left|\frac{28n^2+24n-185}{16n^3-32n+252}\right|$$

נרצה שזה יהיה קטן מכל $0<\varepsilon$

$$\frac{28n^2+24n-185}{16n^3-32n+252} < \frac{28n^2+24n}{16n^3-32n+252} < \frac{28n+24}{16n^2-32} = \frac{7n+6}{4n^2-8}$$

עבור $n>6$:

$$\frac{7n+6}{4n^2-8} < \frac{8n}{3n^2} = \frac{8}{3n}$$

הוכחה: בהינתן $\varepsilon>0$, נבחר $N = \max\left\{6, \left\lceil \frac{8}{\varepsilon} \right\rceil\right\}$ ולכל $n>N$:

$$\left|\frac{3n^3+7n^2+1}{4n^3-8n+63}-\frac{3}{4}\right| = \left|\frac{28n^2+24n-185}{16n^3-32n+252}\right| < \left|\frac{7n+6}{4n^2-8}\right| \overset{n>6}{<} \frac{8n}{3n^2} = \frac{8}{3n}$$

$$< \frac{8}{3\left\lceil \frac{8}{3\varepsilon}\right\rceil} \leq \frac{8}{3\frac{8}{3\varepsilon}} = \varepsilon$$