טענה

לכל $\alpha \in \mathbb{R}$ קיימת סדרה (a_n) כך ש- $a_n \in \mathbb{Q}$ לכל $n \in \mathbb{N}$

ו- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$

הוכחה

לכל $n \in \mathbb{N}$ נתבונן בקטע $(\alpha, \alpha + \frac{1}{n})$. מצפיפות הרציונליות

בממשיים, קיים $a_n \in \mathbb{Q}$ כך ש- $\alpha < a_n < \alpha + \frac{1}{n}$.

בנינו סדרה באופן אינדוקטיבי. צריך להוכיח ש- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$.

בהינתן $\varepsilon > 0$ נבחר $N = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil$. לכל $n > N$

$$0 < a_n - \alpha < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} = \frac{1}{\lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil} \leq \frac{1}{\lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil} \leq \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \frac{1}{\varepsilon}$$

הגדרה:

- סדרה שיש לה גבול, נקראת **מתכנסת**.
- סדרה שאין לה גבול נקראת **מתבדרת**.

משפט (יחידות הגבול)

תהא (a_n) סדרה, אם $l = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ו- $m = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ אז $l = m$

למה 1

אם $l, m \in \mathbb{R}$ כך ש- $l \neq m$, אז קיים $\varepsilon > 0$ כך ש:

$$B_\varepsilon(l) \cap B_\varepsilon(m) = \emptyset$$

הוכחה

נניח בה"כ ש $l < m$. ניקח $\varepsilon = \frac{1}{2}(m-l)$ אז:

$$l+\varepsilon = l + \frac{1}{2}(m-l) = \frac{1}{2}(m+l) = m-\varepsilon$$

$$\underset{B_\varepsilon(l)}{\underset{\parallel}{(l-\varepsilon,\ l+\varepsilon)}} \qquad \underset{B_\varepsilon(m)}{\underset{\parallel}{(m-\varepsilon,\ m+\varepsilon)}}$$

לכן לכל $x \in B_\varepsilon(m)$ ולכל $y \in B_\varepsilon(l)$ מתקיים $y < x$.

ולכן הסביבות זרות.

$\boxed{\text{למה}}$ 2

יהיו $(P_n), (Q_n)$ סדרות של פסוקים לוגיים.

נניח $P_n = True$ ממקום מסוים והלאה, וגם $Q_n = True$ ממקום מסוים והלאה.

אז $P_n \wedge Q_n = True$ ממקום מסוים והלאה.

הוכחה

קיים $N_1 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N_1$ $P_n = True$

קיים $N_2 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N_2$ $Q_n = True$

אז לכל $n > \max\{N_1, N_2\}$ מתקיים $n > N_1$, $n > N_2$ ולכן

$$Q_n = True \wedge P_n = True$$

הוכחת המשפט

נניח בשלילה ש- $l \neq m$.

ניקח $\varepsilon > 0$ כך ש- $B_\varepsilon(l) \cap B_\varepsilon(m) = \emptyset$, (הוכחנו שקיים כזה).

מהגדרת הגבול, $a_n \in B_\varepsilon(l)$ ממקום מסוים ואילך.

מצד שני, $a_n \in B_\varepsilon(m)$ ממקום מסוים ואילך.

כלומר $a_n \in B_\varepsilon(m) \cap B_\varepsilon(l)$ ממקום מסוים ואילך, בסתירה.

אפיון a_n סדרה מתבדרת

- לא קיים $\alpha \in \mathbb{R}$ כך ש $\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n$
- לכל $\alpha \in \mathbb{R}$ $\alpha \neq \lim_{n\to\infty} a_n$
- לכל $\alpha \in \mathbb{R}$ קיים $\varepsilon > 0$ כך שלכל $N \in \mathbb{N}$ קיים

$n > N$ כך ש $\alpha \leq |a_n - \alpha|$