

① $a_n = n$. לראות כי a_n אינו מתכנס, כלומר $\alpha \in \mathbb{R}$

קיים $\varepsilon > 0$ כך לכל $N \in \mathbb{N}$ קיים $n > N$ כך $a_n \notin B_\varepsilon(\alpha)$.

הוכחה:

בהינתן $\alpha \in \mathbb{R}$, נבחר $\varepsilon = 1$. ובהינתן $N \in \mathbb{N}$, מטביאציון קיים

$n > N$ כך $a_n = n > \alpha + 1 = \alpha + \varepsilon$ ולכן $a_n \notin B_\varepsilon(\alpha)$

$$\textcircled{2} \quad a_n = (-1)^n$$

הוכחה:

נבחר $\varepsilon = 2$. נראה כי (a_n) אינו מתכנס.

נניח $N \in \mathbb{N}$ קיים $n > N$ שהיא טיביון. אז:

$$|a_{n-1} - (-1)| = |(-1) - (-1)| = 0 < \varepsilon$$

מנגד, a_n אינו מתכנס.

נבחר $\alpha \neq 1$, α אינו מתכנס (a_n) .

נבחר $\varepsilon = |\alpha - 1|$. לכל $N \in \mathbb{N}$ קיים $n > N$ שהיא טיביון ולכן:

$$|a_n - \alpha| = |1 - \alpha| = \varepsilon \geq \varepsilon$$

כלומר a_n אינו מתכנס.

גבולות וסדר

הצגה: • סדרה (a_n) הנקראת חסומה מלמעלה, כאשר $M \in \mathbb{R}$

כך ש- $a_n \leq M$ לכל $n \in \mathbb{N}$

• סדרה (a_n) הנקראת חסומה מלמטה, כאשר $m \in \mathbb{R}$

כך ש- $m \leq a_n$ לכל $n \in \mathbb{N}$

• סדרה הנקראת חסומה כאשר היא חסומה גם מלמעלה וגם מלמטה.

(למעשה: (a_n) חסומה מלמעלה אם $\{a_n / n \in \mathbb{N}\}$ חסומה מלמעלה)

סדרות מסוימות

- סדרה (b_n) הקבועה חסומה מלמעלה ויש לה גבול.

- $b_n = (-1)^n$ חסומה.

- $c_n = n(-1)^n$ אינה חסומה, לכן אין לה גבול.

משפט

כל סדרה מתכנסת היא חסומה.

הוכחה

נניח (a_n) סדרה מתכנסת ל- a . מהגדרת

הגבול, קיים $N \in \mathbb{N}$ כך לכל $n \in \mathbb{N}$ $a_n \in B_\varepsilon(n)$

כלומר $\alpha - 1 < a_n < \alpha + 1$ נתמקד בקטגוריה $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

ישו הקטגוריה סופית, ולכן קיימת מה מנימוק שמשמאל M , m

ומקסימום שמשמאל M m

$$\begin{array}{lcl} n \leq a_n \leq M & 1 \leq n \leq N & \text{עכשיו} \\ \alpha - 1 \leq a_n \leq \alpha + 1 & N < n & \text{ולכן} \end{array}$$

ולכן $n \in \mathbb{N}$ $\min\{m, \alpha - 1\} < a_n < \max\{M, \alpha + 1\}$ כלומר (a_n)

הוא סדרה חסומה.

הערה: לכן סדרה חסומה, מתכנסת.

לדעת

בהיטות $(a_n), (b_n)$ סדרות כך $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n), \beta = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n)$

ואם $\alpha < \beta$, אז $a_n < b_n$ מ- n מסוים ואילך.

הוכחה

נבחר $\varepsilon = \frac{\beta - \alpha}{2}$ ויש לנו $\alpha + \varepsilon = \beta - \varepsilon$ ומכאן הקטע

$B_\varepsilon(\alpha)$ ו- $B_\varepsilon(\beta)$ זרים, ולכן $x \in B_\varepsilon(\alpha)$ ו- $y \in B_\varepsilon(\beta)$ מתקיים $x < y$

מהעצבר הגדול $a_n \in B_\varepsilon(\alpha)$ מסוים ואילך $b_n \in B_\varepsilon(\beta)$ מסוים ואילך.

ולכן $a_n < b_n$ מסוים ואילך.

נסקרה:

תהי (a_n) סדרה שמגדשת $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$, ויהי $\beta \in \mathbb{R}$ כך $\alpha < \beta$.

ואז $a_n < \beta$ מתקן מסוים ויילק.

(הוכחה: נקח $\epsilon = \beta - \alpha$, מהערה הקודמת, קיימת N כך $n > N \Rightarrow a_n < \alpha + \epsilon = \beta$.)

לערה

תהי "נ"ה" (a_n) סדרה שמגדשת $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$. יהי $\beta < \alpha$ קרוב מזה.

אם $a_n < \beta$ מתקן מסוים ויילק, אז $\alpha \leq \beta$.

(הוכחה: נניח בהפלה $\alpha < \beta$, מהערה הקודמת, קיימת N כך $n > N \Rightarrow a_n < \beta$, ויילק קבוע.)

דנ' הסגנון

תהייה (a_n) , (b_n) , (c_n) סדרות אם $a_n \leq b_n \leq c_n$.

אם $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = \alpha$ ו $\lim_{n \rightarrow \infty} (c_n) = \alpha$, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n) = \alpha$.

הוכחה

יהי $\epsilon > 0$. מהערה הקודמת, קיימת $N_1 \in \mathbb{N}$ כך $n > N_1 \Rightarrow a_n < \alpha + \epsilon$.

במקרה זה, $\alpha - \epsilon < a_n < \alpha + \epsilon$, מהערה הקודמת, קיימת $N_2 \in \mathbb{N}$ כך $n > N_2 \Rightarrow a_n > \alpha - \epsilon$.

אם $\alpha - \epsilon < a_n < \alpha + \epsilon$ ו $n > N_2$, אז $\alpha - \epsilon < a_n < \alpha + \epsilon$.

$$a_n \leq b_n \leq c_n, \quad n > N_3, \quad \text{כאשר } N_3 \in \mathbb{N}$$

$$: n > N \quad \text{כאשר} \quad N = \max \{N_1, N_2, N_3\}$$

$$\alpha - \epsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < \alpha + \epsilon$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n) = \alpha \quad \text{הגדרה: מהצדדים}$$

טכניקות לזכרון

לדעת

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n) = \beta, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = \alpha \quad \text{ע"פ} \quad (a_n), (b_n) \quad \text{תהליכים}$$

$$: \text{הקשר} \quad \text{המכונים} \quad (e_n), (d_n), (c_n) \quad \text{כמקרה}$$

$$e_n = \frac{1}{b_n} \quad (3)$$

$$d_n = a_n \cdot b_n \quad (2)$$

$$c_n = a_n + b_n \quad (1)$$

: כל

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e_n = \frac{1}{\beta} \quad (3) \quad \text{אם } \beta \neq 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \alpha \cdot \beta \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \alpha + \beta \quad (1)$$

ע"פ טכניקות לזכרון

$$a_n = \frac{n^3 + 6n^2 - 6}{3n^3 + 5n + 10}$$

: כל 3

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

ולכן מהצדדים

$$a_n = \left(1 + \frac{6}{n} - \frac{6}{n^3}\right) \cdot \frac{1}{\left(3 + \frac{5}{n^2} + \frac{10}{n^3}\right)}$$

לזכרון טכניקות לזכרון

① דלתא N

הגדרה: (a_n) סדרה, α מספר, הקוואלי: $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = \alpha$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = \alpha \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - \alpha) = 0 \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - \alpha| = 0 \quad (3)$$

הוכחה

① נבחר $\epsilon > 0$ ונמצא N כזה ש $|a_n - \alpha| < \epsilon$ עבור $n > N$.

$$|a_n - \alpha| < \epsilon \iff |(a_n - \alpha) - 0| < \epsilon$$

② דלתא N

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |\alpha| \iff \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$$

הוכחה

$$0 \leq ||a_n| - |\alpha|| \leq |a_n - \alpha|$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - \alpha| = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |\alpha|$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ||a_n| - |\alpha|| = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |\alpha|$$

הוכחה (בשני) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$

הוכחה שהסכום של שתי סדרות מתכנס

נניח $\epsilon > 0$, קיים $N \in \mathbb{N}$ כך לכל $n > N$ מתקיים $|a_n - \alpha| < \frac{\epsilon}{2}$

וקיים $N_2 \in \mathbb{N}$ כך לכל $n > N_2$ מתקיים $|b_n - \beta| < \frac{\epsilon}{2}$

יהי $N = \max\{N_1, N_2\}$, לכל $n > N$

$$|(a_n + b_n) - (\alpha + \beta)| = |(a_n - \alpha) + (b_n - \beta)| \leq |a_n - \alpha| + |b_n - \beta| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

כך נראה! מתקיים

$$\alpha - \frac{\epsilon}{2} < a_n < \alpha + \frac{\epsilon}{2}$$

$$\beta - \frac{\epsilon}{2} < b_n < \beta + \frac{\epsilon}{2}$$

כלומר

$$(\alpha + \beta) - \epsilon < a_n + b_n < (\alpha + \beta) + \epsilon$$

הערה חשובה!

אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ קיים ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ קיים אז $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$ קיים.

כלומר, סכום