הוכחה לכפל באריתמטיקה של גבולות.

נסמן $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ וגם: $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ אז:

$$\left|a_nb_n - \alpha\beta\right| = \left|a_nb_n - \alpha b_n + \alpha b_n - \alpha\beta\right| = \left|b_n(a_n-\alpha) + \alpha(b_n-\beta)\right| \leq$$

$$\leq |b_n|\cdot|a_n-\alpha| + |\alpha|\cdot|b_n-\beta| = \left|\beta+(b_n-\beta)\right|\cdot|a_n-\alpha| + |\alpha|\cdot|b_n-\beta| \leq$$ -אי שוויון המשולש

$$\leq |\beta|\cdot|a_n-\alpha| + |b_n-\beta|\cdot|a_n-\alpha| + |\alpha|\cdot|b_n-\beta|$$ -אי שוויון המשולש

אזי לכל $\varepsilon>0$, קיים n כך ש- $|b_n-\beta| < \frac{\varepsilon}{3(|\alpha|+1)}$

וגם קיים n כך ש- $|b_n-\beta| < 1$

כמו כן קיים n כך ש- $|a_n-\alpha| < \frac{\varepsilon}{3(|\beta|+1)}$

אזי לכל n-מה הגדול מביניהם:

$$|a_nb_n-\alpha\beta| \leq \frac{|\beta|\cdot\varepsilon}{3|\beta|+1} + \frac{\varepsilon}{3(|\alpha|+1)} + \frac{|\alpha|\cdot\varepsilon}{3(|\alpha|+1)} < \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

מסקנה.

תהא (a_n) סדרה מתכנסת ל- α, ו- β מספר ממשי,

אז: $\lim_{n\to\infty}(\beta a_n) = \alpha\cdot\beta$

הוכחה לחילוק באריתמטיקה של גבולות

נסמן $\lim_{n\to\infty}(b_n) = \beta$, $b_n \neq 0$ לכל n, אז:

$$\left|\frac{1}{b_n}-\frac{1}{\beta}\right| = \left|\frac{\beta-b_n}{b_n\cdot\beta}\right| = \frac{|b_n-\beta|}{|b_n|\cdot|\beta|}$$

יהא $\varepsilon>0$. מ-n מסוים והלאה מתקיים $|b_n-\beta|<\frac{\varepsilon\cdot|\beta|^2}{2}$

כמו כן, הוכחנו ש- $\lim_{n\to\infty}|b_n|=|\beta|$ ולכן מ-n מסוים

והלאה $\frac{|\beta|}{2} < |b_n| <$ אז מה-n הגדול מביניהם:

$$\left|\frac{1}{b_n}-\frac{1}{\beta}\right| = \frac{|b_n-\beta|}{|b_n|\cdot|\beta|} < \frac{\frac{\varepsilon\cdot|\beta|^2}{2}}{\frac{|\beta|}{2}\cdot|\beta|} = \varepsilon$$

ולכן $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n} < \varepsilon$ לכל ε החל ממקום מסוים כנדרש.

מסקנה

יהיו (a_n), (b_n) סדרות מתכנסות, כך ש- $a_n\neq0$ לכל n, אם

$\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ ו- $\lim_{n\to\infty}b_n=\beta\neq0$ אז: $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\alpha}{\beta}$

הוכחה: שילוב של אריתמטיקת הגבול והחילוק.

נזכיר:

אם $\lim_{n\to\infty}b_n=0$ ו- (a_n) סדרה מתכנסת, אז $\lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=0$

אבל! אם a_n לא מתכנסת, לא בטוח ש- $a_n\cdot b_n$ מתכנסת.

טענה

אם $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ ו- (a_n) סדרה חסומה, אז $\lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=0$.

הוכחת הטענה:

מהנתון (a_n) סדרה חסומה, קיים $M>0$, כך ש- $|a_n|<M$

לכל $n\in\mathbb{N}$. בהינתן $\varepsilon>0$, קיים $N\in\mathbb{N}$, כך שלכל $n>N$.

$|b_n-0|<\frac{\varepsilon}{M}$, ולכן:

$$|a_n\cdot b_n-0| = |a_n\cdot b_n| = |a_n|\cdot|b_n| < M\cdot\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

לדוגמא:

נתבונן בסדרה $a_n=\frac{\sin(n)}{n}$

אז מתקיים:

$$a_n=b_n\cdot c_n \quad \begin{cases} b_n=\sin n \longrightarrow \text{חסומה} \\ c_n=\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \end{cases}$$

ולכן $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin(n)}{n}\right)=0$

הערה חשובה:

אם a_n סדרה חסומה, ו- b_n סדרה מתכנסת

(לאו דווקא ל-0), אז לא מובטח ש- $(a_n\cdot b_n)$ מתכנסת.

לדוגמא: $a_n=(-1)^n$, $b_n=1$

משפט

לכל $q>0$, $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{q}=1$.

הוכחת המשפט:

- אם $q=1$, הטענה טריוויאלית.

נסמן $a_n=\sqrt[n]{q}$

- אם $0<q<1$, אז $a_n^n=q<1=1^n$ ולכן לכל n $a_n<1$.

נניח בשלילה ש-1 הוא לא הגבול של (a_n). כלומר קיים $0<\varepsilon<1$

כך שלכל $N\in\mathbb{N}$ קיים $n>N$ כך ש- $a_n\le 1-\varepsilon$.

ולכן: $a_n^n=q\le(1-\varepsilon)^n$. אבל הסדרה $(1-\varepsilon)^n$ מתכנסת ל-0.

ולכן קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n>N$ $q>(1-\varepsilon)^n$ בסתירה.

- אם $q>1$, אז: $a_n=\sqrt[n]{q}=\sqrt[n]{\frac{1}{\frac{1}{q}}}=\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{q}}}$

מהמקרה שבו $0<q<1$, נובע ש- $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{q}}=1$.

ומאריתמטיקה של גבולות, $\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{1}=1$

משפט צ'זארו

תהא (a_n) סדרה, תהא (s_n) סדרת הממוצעים

שלה, כלומר לכל $n\in\mathbb{N}$ $s_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k$ אז:

אם $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ אז $\lim_{n\to\infty}s_n=\alpha$.

הוכחת המשפט:

$$|s_n-\alpha|=\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\alpha\right|=\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(a_k-\alpha)\right|=\frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n}(a_k-\alpha)\right|\le$$

$$\le\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}|a_k-\alpha|$$

בהינתן $\varepsilon>0$, קיים $N\in\mathbb{N}$, כך שלכל $k>N$, $|a_k-\alpha|<\frac{\varepsilon}{2}$

אז:

$$|s_n-\alpha|\le\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}|a_k-\alpha|=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N}|a_k-\alpha|+\frac{1}{n}\sum_{N+1}^{n}|a_k-\alpha|\le$$

$$\le\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N}|a_k-\alpha|+\frac{1}{n}\cdot n\frac{\varepsilon}{2}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N}|a_k-\alpha|+\frac{\varepsilon}{2}$$

נסמן $M=\max\{|a_k-\alpha| \mid 1\le k\le N\}$, (יש לו מקסימום כי היא סופית) אז:

$$|s_n-\alpha|\le\frac{N\cdot M}{n}+\frac{\varepsilon}{2}$$

אז עבור $n>\frac{2NM}{\varepsilon}$

$$|s_n-\alpha|\le\frac{NM}{\frac{2NM}{\varepsilon}}+\frac{\varepsilon}{2}=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$