משפט הממוצעים

לכל סדרה סופית של מספרים חיוביים:

ממוצע הרמוני		ממוצע גאומטרי		ממוצע חשבוני
$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right)^{-1}$	$\le$	$\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_k}$	$\le$	$\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}a_k$

הוכחת המשפט:

• **למה 1:** אם $0<x<1$, $1<y$, אז $x+y>1+xy$

הוכחת הלמה:

$$(1-x)y>1-x$$
$$\Downarrow$$
$$y-xy>1-x$$
$$\Downarrow$$
$$y+x>1+xy$$

• **למה 2:** אם $x_1,\dots,x_n$ חיוביים המקיימים $\prod_{k=1}^{n}x_k=x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n=1$

אז $\sum_{k=1}^{n}x_k\ge n$.

הוכחת הלמה: נוכיח באינדוקציה על n. עבור $n=1$ הטענה טריוויאלית.

נניח על $n-1$ ונוכיח על n. המשפט טריוויאלי אם כל ה- x_k שווים.

לכן אחרת לא כולם שווים, בהכרח קיים מספר בסדרה שקטן מ-1

וקיים מספר בסדרה שגדול מ-1. בה"כ $x_{n-1}<1$, $x_n>1$.

אז $x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_{n-2}\left(x_{n-1}\cdot x_n\right)=1$. מהנחת האינדוקציה, $x_1+\ldots+x_{n-2}+x_{n-1}\cdot x_n\geq n-1$

מלמה 1, $1+x_{n-1}\cdot x_n< x_{n-1}+x_n$ ולכן

$$x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}+x_n > x_1+x_2+\ldots+x_{n-2}+1+x_{n-1}\cdot x_n\geq (n-1)+1=n$$

הוכחת המשפט:

יהיו $a_1,\ldots,a_n$ מספרים חיוביים, ונגדיר לכל a_n:

$$x_n=\frac{a_k}{\sqrt[n]{a_1\cdot\ldots\cdot a_n}}.$$

אז:

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{a_k}{\sqrt[n]{a_1\cdot\ldots\cdot a_k}}=\frac{a_1\cdot\ldots\cdot a_k}{\left(\sqrt[n]{a_1\cdot\ldots\cdot a_n}\right)^n}=1$$

ולכן מלמה 2:

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a_1\cdot\ldots\cdot a_n}}\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{\sqrt[n]{a_1\cdot\ldots\cdot a_n}}\geq n$$

$$\Downarrow$$

$$\sqrt[n]{a_1\cdot\ldots\cdot a_n}\leq\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}a_k$$

כעת נתבונן בסדרה $\left(\frac{1}{a_k}\right)_{k=1}^{n}$ שהיא גם סדרה של חיוביות. אז:

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a_1\cdot\ldots\cdot a_n}}=\sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{a_n}}\leq\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$$

$\Downarrow$ ניקח הופכי לשני האגפים (שים הופך כיוון)

$$\underbrace{\sqrt[n]{a_1\cdot\ldots\cdot a_n}}_{\text{ממוצע גיאומטרי}}\geq\underbrace{\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right)^{-1}}_{\text{ממוצע הרמוני}}$$

משפט (צ'זארו לממוצעים גיאומטריים)

תהא (a_n) סדרה של מספרים חיוביים שמתכנסת ל- $\alpha > 0$.

אזי: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} = \alpha$

הוכחת המשפט:

נגדיר את הסדרות

$$T_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \qquad S_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_k} \qquad R_n = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right)^{-1}$$

לכל $n \in \mathbb{N}$ $R_n \le S_n \le T_n$.

מאריתמטיקה של גבולות: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\alpha}$

ממשפט צ'זארו $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = \alpha$ וגם $\lim\limits_{n\to\infty} = \alpha$ עם מאריתמטיקה

וממשפט הסנדוויץ' $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \alpha$

מסקנה:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

הוכחת המסקנה:

נתבונן בסדרה $a_1 = 1$, $a_n = \frac{n}{n-1}$ לכל $n \ge 2$.

לכל n $a_1 \cdots a_n = n$ וגם $\lim\limits_{n\to\infty} = 1$. מהמשפט הקודם:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$