גנשמו:

נתבונן בסדרה (a_n) $a_n = n^2$.

האם זו סדרה מתכנסת? לא.

הוכחנו שכל סדרה מתכנסת היא חסומה.. הקבוצה $\{n^2 | n \in \mathbb{N}\}$

אינה חסומה ולכן הסדרה לא מתכנסת.

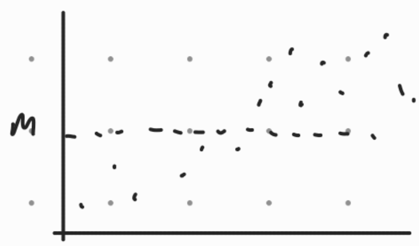
הגדרה: נאמר שסדרה (a_n) **שואפת לאינסוף**, אם לכל $M \in \mathbb{R}$

$a_n > M$ מ-N מסוים והלאה. נסמן $\lim_{n\to\infty}(a_n) = \infty$

הגדרה: נאמר שסדרה (a_n) **שואפת למינוס אינסוף** אם

לכל $m \in \mathbb{R}$, $a_n < m$ ממקום מסוים והלאה. נסמן $\lim_{n\to\infty}(a_n) = -\infty$

הערה:

1. "שואפת לאינסוף" ולא "מתכנסת לאינסוף".
2. סדרה ששואפת לאינסוף אינה מתכנסת.
3. 

4. אם סדרה שואפת ל-$\pm\infty$ נגיד שהיא **מתכנסת במובן הרחב**.

דוגמאות:

- הסדרה $a_n = n^2$ שואפת לאינסוף.
- הסדרה $a_n = -n^3$ שואפת למינוס אינסוף.
- הסדרה $a_n = (-1)^n \cdot n$ לא מתכנסת גם לא במובן הרחב.

טענה

- סדרה השואפת לאינסוף אינה חסומה מלעיל.
- סדרה השואפת למינוס אינסוף אינה חסומה מלרע.

הוכחת הטענה:

נניח בשלילה הסדרה (a_n) חסומה מלעיל, אז קיים M כך ש-

$a_n \le M$ לכל $n \in \mathbb{N}$. כמו ק קיים $N \in \mathbb{R}$ כך שלכל $n > N$

$a_n > M$ וזו סתירה ולכן הסדרה חסומה.

משפט הפכוסה

- יהיו $(a_n),(b_n)$ סדרות המקיימות $b_n \ge a_n$ ממקום

מסוים ואילך. אם $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ אז $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$.

- וההפך עם $-\infty$.

הוכחת המשפט:

בהינתן $M\in\mathbb{R}$, קיים $N_1\in\mathbb{N}$ כך ש- $a_n>M$ לכל $n>N_1$

קיים N_2 כך ש- $b_n\geq a_n$ לכל $n>N_2$. אז לכל

$n>\max\{N_1,N_2\}$, $b_n\geq a_n>M$ ולכן $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\infty$. מ"של.

טענה

תהא (a_n) סדרה של מספרים שונים מ- 0.

אזי $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$, אם $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{|a_n|}=\infty$.

הוכחת הטענה:

יהא $0<M\in\mathbb{R}$. מהגדרת הגבול של (a_n) קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל

$n>N$, $0<|a_n|<\frac{1}{M}$. ולכן, לכל $n>N$ $\frac{1}{|a_n|}>M$.

ולכן $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{|a_n|}=\infty$.

ואם $M\leq 0$, אז ממה שהוכחנו $a_n>1>M$ ממקום מסוים והלאה.

טענה

תהא (a_n) סדרה של מספרים השונים מ- 0. אזי

$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=\infty$, אם $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{|a_n|}=0$.

הוכחת הטענה:

יהי $\varepsilon > 0$, נוס מקומות מסוים ואילך $a_n > \frac{1}{\varepsilon}$ ולכן $\frac{1}{|a_n|} < \varepsilon$

מש"ל.

סדרות מונוטוניות

הגדרה: • סדרה (a_n) תיקרא **מונוטונית עולה** אם $a_{n+1} \geq a_n$ לכל $n \in \mathbb{N}$

• סדרה (a_n) תיקרא **עולה ממש** אם $a_{n+1} \geq a_n$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

• באותו אופן נגדיר סדרה **מונוטונית יורדת** / **מונוטונית יורדת ממש.**

דוגמאות:

• $a_n = n$ עולה ממש.

• $a_n = -n$, $b_n = \frac{1}{n}$ יורדות ממש.

• $(-1)^n$ אינה עולה ואינה יורדת.

• כל סדרה קבועה היא גם עולה וגם יורדת (לא ממש)

משפט

תהא (a_n) סדרה מונוטונית עולה אזי:

יורדת

- אם היא חסומה אז היא מתכנסת.
- אם היא אינה חסומה אז היא שואפת לאינסוף.

מינוס אינסוף

[אז כל סדרה מונוטונית מתכנסת ולו במובן הרחב.]

הוכחת המשפט:

$a_{n+1} \ge a_n$ לכל $n \in \mathbb{N}$. אם (a_n) אינה חסומה, אז

לכל $M \in \mathbb{R}$, קיים $N \in \mathbb{N}$ כך ש- $a_N > M$. ממונוטוניות,

לכל $n > N$ $a_n \ge a_N > M$. לכן מהגדרה $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

אם (a_n) חסומה. נתון ש- $A = \{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ חסומה.

A אינה ריקה כי $a_1 \in A$. ולכן, מתכונות השדה הסדור השלם,

קיים $\alpha = \sup A$. נוכיח ש- $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$,

הוכחנו שאחת מתכונות ה- sup היא שלכל $\varepsilon > 0$ קיים

$c \in A$ המקיים $\alpha - \varepsilon < c < \alpha$. מהגדרת הקבוצה A קיים

$N \in \mathbb{N}$ כך ש- $c = a_n$ $\alpha - \varepsilon < a_N \le \alpha$. מהיות הסדרה עולה, לכל $n > N$

$\alpha - \varepsilon < a_N \le a_N \le a_n < \alpha < \alpha + \varepsilon$ כלומר $\lim_{n\to\infty} (a_n) = \alpha$

בעמוד:

נתבונן בסדרה $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. נוכיח שהסדרה מתכנסת.

נקבל לגבול שלה e (ידוע בתור מספר אוילר.)

נוסחת הבינום של ניוטון: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}(n-j)$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(\prod_{j=0}^{k-1}(n-j)\right)\frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left(\prod_{j=0}^{k-1} 1-\frac{j}{n}\right)$$

אפשר להראות שלכל $n\in\mathbb{N}$ $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ (הבהרה: ש- $\sum$ כלום $=0$, $\prod$ כלום $=1$)

ולכן a_n סדרה מונוטונית עולה ממש.

למה: לכל $k\geq 4$ $k!>2^k$:

בסיס $k=4$ $k!=24$ $2^k=16$

נניח עבור k, אזי: $(k+1)! = (k+1)\cdot k! > 2\cdot 2^k = 2^{k+1}$

למה: לכל $n\in\mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}<1$.

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k} < 1 \underset{\text{סכום סדרה הנדסית}}{=} \frac{1}{2}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} < 1$$

נראה ש- a_n חסומה:

$$a_n < \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = \frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\sum_{k=4}^{n}\frac{1}{k!} < 2\frac{2}{3}+\sum_{k=4}^{n}\frac{1}{2^k} < 3\frac{2}{3}$$

<u>מסקנה</u>: a_n מתכנסת.

נסמן את הגבול שלה ב-e $\quad 2\frac{2}{3} \le e \le 3\frac{2}{3}$