

דמ

יהא $A \subseteq \mathbb{N}$ קבוצה לא חסומה, אז קיימת סדרה

ממ $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ כך שכל איברי A .

הוכחה

A אינה ריקה (כי היא אינה חסומה). נדקדק הסדרה (האוב,

קיים A אינה מינימלית. נסמן אותה ב- n_1 .

נתבונן בקבוצה $I_1 = \{n \in A \mid n > n_1\}$. מהיות A לא חסומה,

I_1 אינה ריקה. נדקדק הסדרה האוב קיימת ל- I_1 איבר מינימלי, נסמן

אותו ב- n_2 .

(נ"ח) הנחת טוינצוקציה לפיה קיימת $n_1 < n_2 < n_3$ שכל איברי

ב- A נלצי קבוצה $I_k = \{n \in A \mid n > n_k\}$. מהיות A לא חסומה,

I_k אינה ריקה ומדקדק הסדרה האוב קיימת $n_{k+1} \in I_k$.

מהצגת I_k , $n_{k+1} \in A$ וזו $n_{k+1} > n_k$. נ"ח.

סדרה

אם (b_n) תת-סדרה של (a_n) ו- (c_n) תת-סדרה של (b_n)

אז (c_n) היא תת-סדרה של (a_n) .

הוכחה

נתון: קיימת סדרה (a_n) של מספרים רציונליים $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ כך

$$b_n = a_{n_k} \quad k \in \mathbb{N}$$

אם קיימת סדרה (b_n) של מספרים רציונליים $(m_f)_{f=1}^{\infty}$ כך

$$c_f = b_{m_f} \quad f \in \mathbb{N}$$

מכילים $c_f = b_{m_f} = a_{n_{m_f}}$ נותן לכפוף $(n_{m_f})_{f=1}^{\infty}$ של מספרים.

$$n_{m_{f_1}} < n_{m_{f_2}} \quad \text{ולכן} \quad m_{f_1} < m_{f_2} \quad \text{אם} \quad f_1 < f_2$$

כי (m) זולה כי (n) זולה

הערה: תהי (a_n) סדרה מסכנת $\alpha \in \mathbb{R}$ יקרא

גבול חלקי של (a_n) אם קיים δ - (a_n) תת-סדרה

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \quad \text{כך} \quad (b_n)_{n=1}^{\infty}$$

• כמו כן $\infty/-\infty$ הוא גבול חלקי במובן הרחב אם קיימת

δ - (a_n) תת-סדרה שמתכנסת ל- $\infty/-\infty$

① $a_n = (-1)^n$, הסדרה $\{1, -1\}$ היא הסדרה (a_n) .

② $a_n = \begin{cases} n^2 & : n \text{ זוגי} \\ -n^2 & : n \text{ אי-זוגי} \end{cases}$, הסדרה $\{\infty, -\infty\}$ היא הסדרה (a_n) .

③ $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \dots)$ היא הסדרה $\{0, 1\}$.

④ $(1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, \dots)$ היא הסדרה ∞ כאשר $n \in \mathbb{N}$.

משפט היסודי

תהי (a_n) סדרה מתכנסת ל- $\alpha \in \mathbb{R}$, אז לכל $\epsilon > 0$ קיים N כך ש-

עבור $n > N$ מתקיים $|a_n - \alpha| < \epsilon$.

הוכחת המשפט

יהי $\epsilon > 0$. נגדיר N כמספר טבעי כזה ש-

עבור $n > N$ מתקיים $|a_n - \alpha| < \epsilon$. נגדיר $b_k = a_{n_k}$ לכל $k \in \mathbb{N}$.

נבחר k כזה ש- $n_k > N$, אז $|b_k - \alpha| < \epsilon$.

$$|b_k - \alpha| = |a_{n_k} - \alpha| < \epsilon$$

(מכיוון שהסדרה (a_n) מתכנסת ל- α , היא שכיחה, ויש לה גבול).

מתקיים לכל $\epsilon > 0$ קיים N כך ש-

הפונקציה נוספת בהוכחה:

כתיבה בשיעור עסקי - $P_n = T^{\mu} u$ מחקות מסוימת ואלק

לזכור - $P_{n_k} = T^{\mu} u$ מחקות מסוימת ואינך.

הערה:

משפט הירושלם תקף גם בחוקן הרחב.

מסקנה

יורם לסברה יש יותר מקבילים חלקי טור, אז הוא לא מתכנס.

משפט (אוסקר גל במיל חלקי)

תהא (a_n) סדרה, אז $\alpha \in \mathbb{R}$ הוא גבול חלקי שלה

אנחנו רוצים $\varepsilon > 0$ קבוצת הטוינקסט $\{n \in \mathbb{N} \mid |a_n - \alpha| < \varepsilon\}$

אין חסמה כלומר יש טוינסות אינסופיות בדיוק הטוינסילות של הטוינסות.

הוכחת המשפט

בכיוון $\Leftarrow$: נניח α הוא גבול חלקי של (a_n) כלומר

סדרה סוקרטית (a_n) לבעיית $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ כך ש-

$\lim_{k \rightarrow \infty} (a_{n_k}) = \alpha$ יהא $0 < \varepsilon$ נניח, אז קיים $K \in \mathbb{N}$ כך שלכל

$$|a_{n_k} - a| < \varepsilon, \quad k > K$$

נתבונן בקבוצה $\{n \in \mathbb{N} \mid |a_n - a| < \varepsilon\}$. קבוצה זו מכילה את

$$\{n_k \mid k > K\}$$

שהיא קבוצה לא חסומה.

זכרון $\Rightarrow$ נתון $\varepsilon > 0$ הקבוצה $\{n \in \mathbb{N} \mid |a_n - a| < \varepsilon\}$ אינה

חסומה. נתבונן בקבוצה $\{n \in \mathbb{N} \mid |a_n - a| < 1\}$. מכאן נובע כי קבוצה זו

חסומה, ומעקב הסדר יש לה טיב מנימלי, שכן n_1 .

$$|a_{n_1} - a| < 1$$

כעת נתבונן בקבוצה: $\{n > n_1 \mid |a_n - a| < \frac{1}{2}\}$. מכאן, קבוצה זו אינה

חסומה ולכן לא ייתכן שיהיה טיב מנימלי שכן n_2 .

$$|a_{n_2} - a| < \frac{1}{2} \quad \text{וגם} \quad n_2 > n_1$$

נניח הנחת סוגריים, $n_1, n_2, \dots, n_k$ הנתונים את

$$n_1 < n_2 < \dots < n_k \quad \text{ולכן} \quad j \in \{1, \dots, k\}$$

$$|a_{n_j} - a| < \frac{1}{j} \quad \text{נתבונן בקבוצה} \quad \{n > n_k \mid |a_n - a| < \frac{1}{k+1}\}$$

קבוצה זו אינה חסומה ולכן אינה טיב מנימלי שכן

$$|a_{n_{k+1}} - a| < \frac{1}{k+1} \quad \text{וגם} \quad n_k < n_{k+1}$$

בטווח / טווח צוקיני / זניט / סדרה (n_k) / מלב / ממש / המתייחס

גלגל $a \in \mathbb{N}$ $|a_{n_k} - a| < \frac{1}{k}$ נסמן $b_k = a_{n_k}$

י'הו $\varepsilon > 0$ נתון, נבחר $K = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil$ ט"ז / לנד $k > K$

$$|b_k - a| = |a_{n_k} - a| < \frac{1}{k} < \frac{1}{K} < \frac{1}{\varepsilon} = \varepsilon$$

נלומד (b_k) מתכנס ל- a

משפט (א-יין / ל / זמיל / חלקי / במיין / הכח) (a_n)

ורחב (a_n) סדרה, ט"ז $-\infty / \infty$ הוא זבול / חלקי

במוקד / הכרה / גלה / ט"ז (a_n) טינה / חסומה / מלכז / מלדל

דמיה

ורחב (a_n) סדרה, איש / הוא / לט / חסומה / מלדל / טז

לנד $m \in \mathbb{R}$ / הקטובה $\{n \in \mathbb{N} / a_n > m\}$ טינה / חסומה

הוכחה / הלמה

נניח בשלילה שקיים $m \in \mathbb{R}$ כך שהקטובה $\{n \in \mathbb{N} / a_n > m\}$

חסומה. כלומר קיים $N \in \mathbb{N}$ כך ש- $a_n \leq m$ לכל $n > N$

לכן $a_n \leq \max \{1 \leq a_k \leq n, m\}$ כסתייגה לטי / תמימה / מלדל

הוכחת המשפט

($\Leftarrow$) נניח $\varepsilon > 0$ קבוע. נבחר n_1 כזה ש

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = \infty$$

ולכן קיימת n_1 כזו שכל $n > n_1$ מקיים

($\Rightarrow$) נניח $\varepsilon > 0$. נבחר n_1 כזה ש

מכל $n > n_1$ קבוע $\varepsilon > 0$ נבחר n_1 כזה ש

הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס. נבחר n_1 כזה ש

נבחר n_1 כזה ש $\{n \in \mathbb{N} \mid a_n > 2\}$ מתכנס.

ולכן קיימת n_1 כזו שכל $n > n_1$ מקיים

$$a_{n_2} > 2, \quad a_{n_2} > a_1$$

נניח $a_1, a_2, \dots, a_k$ שייכים לטור.

$$a_1 < a_2 < \dots < a_k$$

נבחר n_1 כזה ש $\{n \in \mathbb{N} \mid a_n > k+1\}$ מתכנס.

ולכן קיימת n_1 כזו שכל $n > n_1$ מקיים

$$a_{k+1} > a_k, \quad a_{k+1} > k+1$$

המשפט הראשון, כל $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

המשפט

(משפט)

ולפי

$$a_{n_k} > K$$

$$K \in \mathbb{N}$$