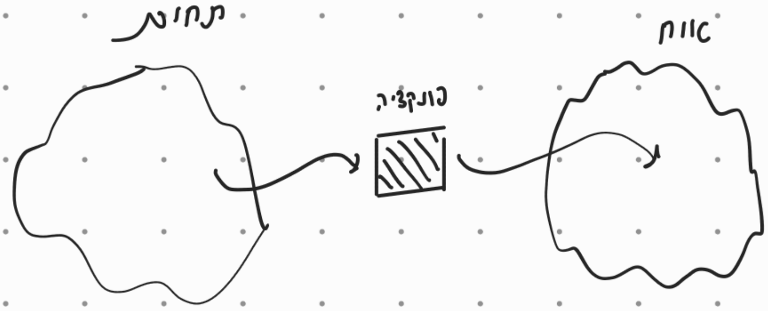
פונקציות (ממשיות)



- תחום = קבוצה ($\subseteq \mathbb{R}$)
- טווח = קבוצה ($\subseteq \mathbb{R}$)
- לכל השמה - מהו העיבר בטווח שהפונקציה מחזירה בהינתן עיבר בתחום.

סימון: יהיו $A,B \in \mathbb{R}$. פונקציה f שהתחום שלה הוא A והטווח שלה הוא B מסומנת $f: A \longrightarrow B$.

הגדרה: • תהא $f: A \longrightarrow B$. **התמונה** של f היא:

$$\text{Image } f = \{ f(x) \mid x \in A \}$$

- f נקראת **חח"ע - חד-חד ערכית**, אם עבור $x_1, x_2 \in A$

$$x_1 = x_2 \Longleftarrow f(x_1) = f(x_2)$$

- f נקראת **על**, אם $\text{Image} f = B$ במילים אחרות, אם לכל $y \in B$ קיים $x \in A$ כך ש- $f(x) = y$.

דוגמאות

1. פונקציה שמוגדרת על $\mathbb{R}$ ומחזירה תמיד את המספר 5.

(זו פונקציה קבועה). $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ $\quad f(x)=5 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

$\mathrm{Image}\, f=\{5\}$

2. פונקציה שמוגדרת ב- $\mathbb{R}$ ומעלה את המספר המוצב בה בריבוע.

$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R} \quad f(x)=x^2 \quad \forall x\in\mathbb{R}. \quad \mathrm{Image}\, f=[0,\infty)$

הפונקציה אינה חח"ע כי $f(1)=f(-1)$. וגם אינה על.

3. $f:[0,\infty)\longrightarrow[0,\infty), \quad f(x)=x^2$

זו פונקציה חח"ע ועל.

4. $f:[-1,1]\longrightarrow\mathbb{R}, \quad f(x)=\frac{x^3+8x}{x^2-25}$

ניתן להרחיב את תחום ההגדרה ל- $\mathbb{R}\setminus\{-5,5\}$

5. $D:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad D(x)=\begin{cases} 1 & x\in\mathbb{Q} \\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

פונקציה זו ידועה בשם פונקציית דיריכלה.

6. $A=\{a+b\sqrt{2} \mid a,b\in\mathbb{Q}\}\cup\{\frac{\pi^2}{17}+\frac{36}{\pi}\}, \quad f:A\longrightarrow\mathbb{R}$

$f\left(\frac{\pi}{17}\right)=5, \quad f\left(\frac{36}{\pi}\right)=7, \quad f(\sqrt{2})=\sqrt{3}.$ אחרת: $f(x)=1$

ז) $f: \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$f(x)$ מחזירה את מספר המופעים של הספרה 7 בייצוג העשרוני של A. אם מספר המופעים אינסופי, $f(x)=1$.

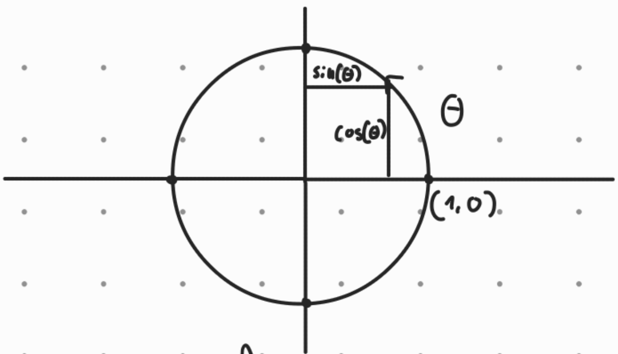
ח) $Id: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R},\ Id(x) = x$

פונקציה זו מכונה פונקציית הזהות.

<u>הגדרה:</u> אם $f: A \longrightarrow C$, $B \subseteq A$, נסמן ב- <u>$f|_B$ (f מצומצמת ל-B)</u>

את הפונקציה $f|_B: B \longrightarrow C$ המקיימת לכל $x \in B$ $f|_B(x) = f(x)$

<u>דוגמאות:</u>



אם נסמן את היקף המעגל $= 2\pi$, אז לכל θ:

$$\sin(\theta) = \sin(\theta + 2\pi k) \qquad k \in \mathbb{Z}$$
$$\cos(\theta) = \cos(\theta + 2\pi k)$$

זהויות:

$$\left\{\begin{array}{l}\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1 \\ \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\theta) \quad , \quad \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(\theta) \\ \sin(x+y) = \sin(x)\cdot\cos(y) + \cos(y)\cdot\sin(x) \\ \cos(x+y) = \cos(x)\cdot\cos(y) - \sin(x)\cdot\sin(y)\end{array}\right.$$

אפשר להוכיח את זה גיאומטרית, אבל אפשר גם עם ש קסינומות השבה הסבוג כ״צוג האלגברי של סינוס וקוסינוס.

נזכיר גם $\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$ כשהמכנים שונים מ-0.

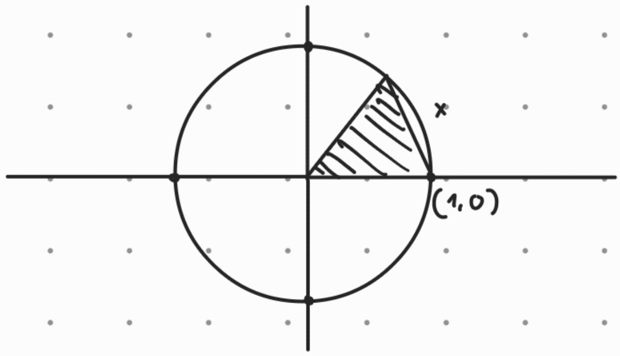
$\cot(\theta) = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$

למה

לכל $x \in \mathbb{R}$ $|\sin x| \le |x|$

"הוכחת" הלמה

לכל $0 < x \le \frac{\pi}{2}$:



שטח המשולש $= \frac{1}{2}\sin(x)$

שטח הגזרה $= \frac{x}{2\pi}\cdot\pi = \frac{1}{2}x$

מכיוון ששטח המשולש קטן משטח הגזרה: $0 < \sin x < x$

אם הוכחנו לכל x חיובי, אז לכל x שלילי.

$$|\sin x| = |-\sin x| = |\sin(-x)| \le |-x| = |x|$$

הגדרה:

נניח ש- $f: A \to \mathbb{R}$, $g: B \to \mathbb{R}$ אז נגדיר:

חיבור פונקציות

$f+g: A \cap B \to \mathbb{R}$, $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

הגדרה:

אם $f: A \to B$, $g: B \to C$ אז נגדיר:

הרכבת פונקציות

$g \circ f: A \to C$ $\quad g \circ f(x) = g(f(x))$

דוגמא:

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(u)=u^2$, $g(v)=v+5$

$$g\circ f(x)=g(f(x))=g(x^2)=x^2+5$$

$$f\circ g(x)=f(g(x))=f(x+5)=(x+5)^2$$

אז באופן כללי: $f\circ g\neq g\circ f$ (הרכבה היא לא קומוטטיבית)

טענה:

יהיו $f:A\to B$, $g:B\to C$, $h:C\to D$, אזי:

$$h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f \qquad (1)$$

$$f=f\circ Id=Id\circ f \qquad (2)$$