גבול של פונקציה בנקודה

מוטיבציה:

נסתכל לדוגמא על $g(x)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$. הפונקציה אינה מוגדרת
עבור $x=a$ אבל בכל זאת נרצה לדבר על $\lim\limits_{x\to a} g(x)$

הגדרה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}$, $f:A\to\mathbb{R}$. ויהא $a\in\mathbb{R}$ כך
שקיימת סביבה מנוקבת של a בתחום ההגדרה
של A. נאמר ש- $\boxed{\lim\limits_{x\to a} f(x)=L}$ אם:
לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל x המקיים $0<|x-a|<\delta$
מתקיים: $|f(x)-L|<\varepsilon$.

דוגמאות

(1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=5$ $\forall x\in\mathbb{R}$.

טענה: $\lim\limits_{13} f=5$ **הוכחה:** בהינתן $\varepsilon>0$ נבחר $\delta=1$.
ולכן x המקיים $0<|x-13|<\delta$, מתקיים $|f(x)-5|=5-5=0<\varepsilon$

הערה: לכל $a\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{a} f(x)=5$.

2

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 3 \\ \pi & x = 3 \end{cases} \qquad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

<u>טענה:</u> $\lim_{3} f(x) = 9$ <u>הוכחה:</u>

$$|f(x)-9| = |x^2-9| = |x+3||x-3| < (|x-3|+6)\cdot|x-3|$$

אז עבור כל x המקיים $0<|x-3|<\delta$

$$|f(x)-9| < (\delta+6)\cdot\delta$$

יהי $\varepsilon>0$, אז עבור $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{7}\}$

$$|f(x)-9| < \varepsilon$$

(ובכלל לכל a, $\lim_{a} f(x) = a^2$)

3

$f:(0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$.

<u>טענה:</u> לכל $a>0$, $\lim_{a} f = \frac{1}{a}$ <u>הוכחה:</u>

$$\left|f(x) - \frac{1}{a}\right| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| = \frac{|x-a|}{xa}$$

יהי $\varepsilon>0$, אז עבור $\delta<\frac{a}{2}$ מתקיים ל-x בסביבת δ סביב a:

$$x = x + (x-a) \geq a - |x-a| > a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}$$

ולכן:

$$\left|f(x) - \frac{1}{a}\right| = \frac{|x-a|}{xa} < \frac{|x-a|}{\frac{a^2}{2}}$$

אז עבור $\delta = \min\{\frac{a}{2}, \frac{a^2}{2}\}$

$$\left|f(x) - \frac{1}{a}\right| < \frac{|x-a|}{\frac{a^2}{2}} < \frac{\frac{a^2}{2}\varepsilon}{\frac{a^2}{2}} = \varepsilon$$

דיריכלה

4. $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ $\quad f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

<u>טענה:</u> $\lim_{0} f$ אינו קיים.

נניח כי לכל L קיים $\varepsilon > 0$ כך שלכל $\delta > 0$ קיים x

המקיים $0 < |x-a| < \delta$ כך ש- $|f(x)-L| \geq 0$.

יהא L ממשי. נבחר $\varepsilon = \frac{1}{4}$, אז לכל δ, מכיוון

שבכל הרציונליים וגם האי-רציונליים צפופים

בממשים, קיימים $x_1 \in \mathbb{Q}$ כך ש- $0 < |x_1 - 0| < \delta$

$x_2 \notin \mathbb{Q}$ כך ש- $0 < |x_2 - 0| < \delta$

אז לא ייתכן כי $|f(x_1)-L| < \frac{1}{4}$ וגם $|f(x_2)-L| < \frac{1}{4}$.

שכן באילו זה היה נכון, אז $|L| < \frac{1}{4}$ וגם $|1-L| < \frac{1}{4}$

אז $\frac{1}{4} > |1-L| < |1|-|L| > \frac{3}{4}$ בסתירה.

5. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$.

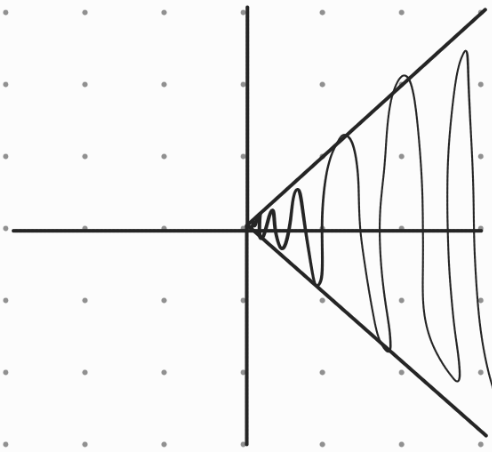
<u>טענה:</u> $\lim_{0} f = 0$ <u>הוכחה:</u>

בהינתן $\varepsilon > 0$, נבחר $\delta = \varepsilon$, ולכן x המקיים $0 < |x-0| < \delta$

$$|f(x) - 0| \leq |x| < \delta = \varepsilon$$

(6)

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}, \quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$



טענה: $\lim_{0} f = 0$ הוכחה:

בהינתן $\varepsilon > 0$, נבחר $\delta = \varepsilon$. לכל x המקיים $0 < |x-0| < \delta$

$$|f(x) - 0| = |x|\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x| < \delta = \varepsilon$$