

# לֶמְנָה (יחידה)

נניח  $f: A \rightarrow B$  פונקציה ממרחב  $A$  למרחב  $B$ .

אנו רוצים להגדיר  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$  כאשר  $a \in A$  ו- $l \in B$ .

## הוכחת לֶמְנָה

נניח  $l \neq m$ . נגדיר  $\epsilon = \frac{1}{2} |l - m|$ .

$$B_\epsilon(l) \cap B_\epsilon(m) = \emptyset$$

נניח  $\delta_1 > 0$  כך ש- $B_{\delta_1}(a) \cap A \neq \emptyset$ .

$$0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon = (f(x) \in B_\epsilon(l))$$

נניח  $\delta_2 > 0$  כך ש- $B_{\delta_2}(a) \cap A \neq \emptyset$ .

$$0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - m| < \epsilon = (f(x) \in B_\epsilon(m))$$

נבחר  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ . אז לכל  $x \in A$  נכון:

אם  $0 < |x - a| < \delta$ , אז  $|f(x) - l| < \epsilon$  ו- $|f(x) - m| < \epsilon$ .

אבל זהו סתירה!

# (סדר) הינה פונקציה בנקודה

תהי  $f: A \rightarrow B$  מונצרת הסביבה מנוקדת  $a \in U$

אז  $\lim_a f = l$  כאשר  $(x_n) \subset U$  סדר

המקיימת  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ,  $\frac{x_n - a}{n} \rightarrow 0$ , מתקיים  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l$

טאני-צורמל

הינה פונקציה בנקודה  $a$  יכול להיות שזה  $\nabla$   $\nabla$   $\nabla$

פונקציה ציכולה מונצרת בסביבה  $a$  טאני

הסדר  $x_n = \frac{1}{n}$  מקיימת  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$

הסדר  $(f(x))$  מקיימת  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 1$

אין זה נכון  $\lim f = 1$

## הוכחת המשפט

$\Leftrightarrow$  נניח  $\lim_a f = l$  תהי  $(x_n)$  סדר ב  $U$  המקיימת  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

בהינתן  $\epsilon > 0$ , קיים סדר  $x$  המקיימת  $|x - a| < \delta$

מתקיים  $|f(x) - l| < \epsilon$  מונצרת הנחה  $a$  וסדר, קיים

$N \in \mathbb{N}$  כך לכל  $n > N$   $0 < |x_n - a| < \delta$

אז לכל  $n > N$   $|f(x_n) - l| < \epsilon$  כלומר  $\lim_a f(x) = l$

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  מתקיים,  $(x_n) \subseteq U$  וכל  $\delta > 0$  קיים  $N$  כזה  $\Rightarrow$

$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l$  נגיד  $l \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f$  כן. פירוט בהוכחה קיים.

נבחר  $\epsilon > 0$  כזה  $\delta > 0$  קיים  $N$  כזה  $x \in U$

$$|f(x) - l| \geq \epsilon \quad \text{כאשר} \quad |x - a| < \delta$$

$\delta = \frac{1}{n}$  קיים  $N$  כזה  $x_n \in U$

$$|f(x) - l| \geq \epsilon \quad \text{כאשר} \quad |x_n - a| < \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \in \quad |x_n - a| < \frac{1}{n}$$

$$l \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(x) \in \quad |f(x_n) - l| \geq \epsilon$$

14 N213

$$f(x) = \sin \frac{1}{x}, \quad f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

:נמצא  $\lim_{n \rightarrow \infty} f$  נבחר הוכחה:

$$y_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$$

$$x_n = \frac{1}{n\pi}$$

נבחר  $x_n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$$

נבחר

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$$

כל

$$f(y_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1$$

$$f(x_n) = \sin(n\pi) = 0$$

כל  $n$

כל  $n$  מתקיים הוכחה נבחר הוכחה נבחר הוכחה

# לסדר (אנליזה ממשית)

א,  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g: B \rightarrow \mathbb{R}$  מוגדרות בסביבה של  $a$

$\lim_{x \rightarrow a} f = l$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g = m$

$\lim_{x \rightarrow a} (f+g) = l+m$        $\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g) = l \cdot m$

$\lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{f}{g} \right) = \frac{l}{m}$        $m \neq 0$

## הוכחה המשפט

הוכחה חלקית בסיומת  $\delta, \epsilon$

'פא'  $\epsilon > 0$   $n$  הגזר  $\delta$  הוגדר

$|f(x) - l| < \frac{\epsilon}{2} \Leftrightarrow |x - a| < \delta_1$

$|g(x) - m| < \frac{\epsilon}{2} \Leftrightarrow |x - a| < \delta_2$

$|g(x) - m| < \frac{\epsilon}{2}, |f(x) - l| < \frac{\epsilon}{2} \Leftrightarrow |x - a| < \delta$        $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

$|(f+g)(x) - (l+m)| = |f(x) + g(x) - l - m| = |(f(x) - l) + (g(x) - m)| \leq |f(x) - l| + |g(x) - m| < \epsilon$

הוכחה מלאה  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

תהא  $(x_n)$  סדרה בתחום  $\mathbb{R}$  הריגור  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

לט  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l$



תהי  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה ממרחב  $A$  לממרחב  $\mathbb{R}$ .  
 נניח כי  $f$  היא פונקציה רציפה. נרצה להראות כי  $f$  היא פונקציה ליניארית.

$$f \in L^1(\mathbb{R}^n) \text{ and } g \in L^1(\mathbb{R}^n) \text{ then } (f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy$$
[illegible]

$$|f(x) - l| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad a < x < a + \delta$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f = \lim_{a^+} f = l \quad \text{! / NOJ}$$

2013 232 222 212 202

$$|f(x) - b| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad a - \delta < x < a + \delta$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f = \lim_{x \rightarrow a^+} f = f \quad \text{! / no}$$

(17) כיין היינה חן 333

Loen

תהליך מוצג כסוגיית מנהלית

התהליך  $(x_n) \in \mathcal{U}$  נקרא  $\mathcal{U}$ -סדרה  $\lim_{n \rightarrow \infty} f = l$  אם

(וכן למקרה השני)  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l$   $\Leftrightarrow$   $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$

6den

תבוא  $f$  מוגדרת כפסיקה ממוקדת  $g, a, b$   $f: M \rightarrow N$  ונא:

$$\lim_{a^-} f = l \quad \sim 21 \quad \lim_{a^+} f = l$$

# לִמְדָה (הכנה ל) (בסוף השיעור) (המבחן)

תהיה  $f$  פונקציה  $g$  כגון  $e$   $f \circ g$  מוגדרת בסגירה

מתקנת  $a$ ,  $b$

$$\lim_{x \rightarrow a} f = l \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} g = m \quad (2)$$

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow a} f \circ g = l \quad \text{אם } a \in \text{dom } f$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f \circ g = m$$

## הוכחה (לִמְדָה)

נניח  $x \in U$   $f(x) \neq a$   $U$   $a$   $f$   $U$   $a$   $f$

נניח  $(x_n) \subset U$   $x_n \rightarrow a$

נניח  $y_n = f(x_n) \neq l$   $U$   $l$

נניח  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = l$   $U$   $l$

נניח  $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = m$   $U$   $m$

נניח  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$   $U$   $a$   $(x_n) \in U$   $U$   $a$

$$\lim_{x \rightarrow a} f \circ g = m, \quad \lim_{x \rightarrow a} g = m, \quad \lim_{x \rightarrow a} f = l$$

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

פונקציה

$$g(x) = \begin{cases} 1 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

כלומר, אין אפשרות לומר

מה משמרה אם  $f$  רציפה?

מה משמרה אם  $g$  רציפה ב- $l$ ?

על לא צריך יותר התבטא. הגלש ומתקין

מה משמרה אם  $f$  ו- $g$  רציפים?

(24)  $\lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x) = g \circ f(a)$  כלומר, אם  $f$  רציפה ב- $a$  (הוכחה דמיכאל)