

לעזרה

תהייה f, g פונקציות מסוימות בסביבה ממוקדת של a .

אם $\lim_{x \rightarrow a} f = l$, $\lim_{x \rightarrow a} g = m$ וכן $f(x) < g(x)$ בסביבה של a , אז $l \leq m$.

הוכחה

נניח (x_n) סדרה באותה סביבה ממוקדת של a המקיימת:

$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = a$, מתקיים, לכל $n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) \leq g(x_n)$, אז מקיפים:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l \quad \text{ו} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = m$$

מכאן שיש סדרה (x_n) ו- a המקיימת $a_n \leq b_n$ לכל n ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = m$.

אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = m$ ו- $a_n \leq b_n$ לכל n , אז נכח (במשפט) ש- $l \leq m$.

לעזרה

תהייה f, g פונקציות מסוימות בסביבה ממוקדת של a .

אם $\lim_{x \rightarrow a} f = l$, $\lim_{x \rightarrow a} g = m$ ו- $l < m$, אז קיימת סדרה ממוקדת של a ,

שבה לכל x מתקיים $f(x) < g(x)$.

הוכחה: הלשונה:

נבחר $\varepsilon = \frac{1}{2}(m-l)$, שם δ_1 כך $0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x)-l| < \varepsilon$

וקימנו δ_2 כך $0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x)-l| < \varepsilon$

נסמן $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, שם $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow$
 $f(x) < l + \varepsilon = \frac{m+l}{2}$
 $g(x) > m - \varepsilon = \frac{m+l}{2}$

יפס $f(x) < g(x)$

(סגוריות פונקציות) לשונה

תהייה f, g, h פונקציות מוגדרות בקטגוריה ממקבית $a \in \mathbb{R}$ ו

וכן מתקיים $f(x) < g(x) < h(x)$: λ לכל

אם $\lim_{x \rightarrow a} g = l$, שם $\lim_{x \rightarrow a} f = \lim_{x \rightarrow a} h = l$

הוכחה: הלשונה

תהייה (x_n) סדרה קטגוריה המוגדרת מתקיימת $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

אם $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = l$, תהייה $f(x_n) \leq g(x_n) \leq h(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, מקוראין היינה

משנה הסגוריות פונקציות במסגרת $(f(x_n)), (g(x_n)), (h(x_n))$, נקודת

$\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = l$, שם $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l$, היינה פונקציה

הערה:

הפונקציה $f: A \rightarrow B$ נקראת חסומה אם לכל $x \in A$ מתקיים $f(x) \in B$.

כל סדרת חסומה $\{f(x) \mid x \in A\}$ היא סדרת חסומה.

כל סדרת חסומה.

אם $\forall x \in A$ מתקיים $f(x) \in B$ אז f חסומה.

חסומה.

משפטים:

1. $D: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ זכירה חסומה כי $\{D(x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{0, 1\}$.

2. $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$.

• f איננה חסומה על $\mathbb{R}$ כי $f(x) = \frac{1}{x}$ איננה חסומה על $\mathbb{R}$.

• ב- $(0, \infty)$ f איננה חסומה על $(0, \infty)$ כי $f(x) = \frac{1}{x}$ איננה חסומה על $(0, \infty)$.

• ב- $(1, 2)$ f חסומה כי $\{f(x) \mid x \in (1, 2)\} = (\frac{1}{2}, 1)$.

• f חסומה מקומית בכל נקודה $a \in \mathbb{R}$.



הערה:

הפונקציה f נקראת חסומה אם לכל $x \in A$ מתקיים $f(x) \in B$.

חסומה מקומית ב- a אם f חסומה על $(a, a + \delta)$ לכל $\delta > 0$.

חסומה מקומית ב- a אם f חסומה על $(a - \delta, a)$ לכל $\delta > 0$.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \frac{p}{q} = x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

נתבונן בפונקציה הזו:

היא פאסה, חסומה, בעלת סביבה מקומית.

לענה

היא פונקציה מוגדרת בסביבה מקומית של a ו- $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ קיים.

אם f חסומה מקומית ב- a .

הוכחה:

יהי $l = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ נבחר $\epsilon = 1$. מהגדרת הקיום של $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

$$\exists \delta > 0 \text{ כזה שכל } x \text{ המקיים } |x - a| < \delta \text{ מקיים } |f(x) - l| < 1$$

$$|f(x)| = |f(x) - l + l| \leq |f(x) - l| + |l| \leq 1 + |l|$$

מהגדרה, f חסומה מקומית ב- a .

לענה

אם f, g מוגדרות בסביבה מקומית של $a \in \mathbb{R}$ ו- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$.

אז $\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g) = 0$ כלומר f חסומה מקומית ב- a .

הוכחה: הולצרה:

יהא $\varepsilon > 0$ נתון. נבחר δ_1 כזה שיהיה $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ עבור $|x - a| < \delta_1$.

$$|f(x)| < M \Leftrightarrow |x - a| < \delta_1$$

$$|f(x)| < \frac{\varepsilon}{M} \Leftrightarrow |x - a| < \delta_2$$

נבחר $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, אז לכל x המקיים $|x - a| < \delta$,

$$|f(x)| < M, |f(x)| < \frac{\varepsilon}{M} \Rightarrow |f(x) \cdot g(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

הולצרה: יהא f מוגדרת בסביבת a נאמר f - e

$$\lim_{x \rightarrow a} f = f(a)$$

הערה:

① אם f איננה נגזרת ב- a , אז $\lim_{x \rightarrow a} f$ קיים, נאמר

כי a היא נק' כזו שבה הפונקציה לא נכנסת לגבול

② f נגזרת ב- a אם יש פונקציה g כזו ש- $g(a) = f(a)$ ו- $g'(a) = 1$

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - a| < \delta$$

$$f(x) = x^2, f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

(1)

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad f(3) = 9 = f(3)$$

(למשל $f(3) = 9$ ו- $f(3) = 9$ כנראה מקושר.)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 4 & x = 0 \end{cases} \quad f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

(2)

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad f(a) = \frac{1}{a} = f(a) \quad a = 0$$

(נניח $f(0) = 4$ ו- $f(0) = 4$ כנראה מקושר.)
 נקודה $f(0) = 4$ ו- $f(0) = 4$ כנראה מקושר.

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

(3)

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad f(0) = 0 = f(0)$$

למשל $f(0) = 0$ ו- $f(0) = 0$ כנראה מקושר.

$$a \in \mathbb{R} \quad f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

(4)

הוכחה: $\delta > 0$ ו- $\epsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך $\delta > 0$

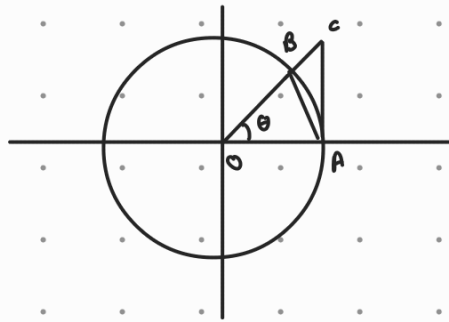
$$|f(x) - f(a)| < \epsilon \iff |x - a| < \delta$$

$$|f(x) - f(a)| = \left| 2 \sin\left(\frac{x-a}{2}\right) \cos\left(\frac{x+a}{2}\right) \right| = 2 \left| \sin\left(\frac{x-a}{2}\right) \right| \cdot \left| \cos\left(\frac{x+a}{2}\right) \right| \leq 2 \left| \sin\left(\frac{x-a}{2}\right) \right|$$

$$2 \left| \sin\left(\frac{x-a}{2}\right) \right| \leq 2 \left| \frac{x-a}{2} \right| = |x-a| < \delta = \epsilon$$

$$|f(x) - f(a)| \leq |x-a|$$

הוכחה של $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

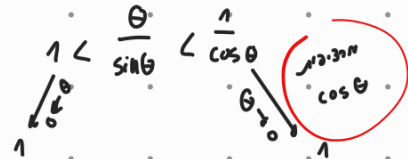


$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{הוכחה}$$

$$S_{OAB} < S_{OAC}$$

$$\sin \theta < \theta < \tan \theta \quad \text{for } \theta > 0$$

$$\theta = 0 \quad \text{הוכחה}$$



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

הוכחה

הוכחה של $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$