

מסקנה: f כזיכר. בכל הנקודות x ו- y בטרנסיואליות.
 f טינה. כזיכר. לכל הנקודות x ו- y בטרנסיואליות.

משפט של פונקציות כזיכר

למה

תהי f כזיכר. $a \in \mathbb{R}$. $f(a)$ טינה, $f(a)$ טינה.

סביבה $(a-\delta, a+\delta)$ שבה f חזקה.

הצורה: f חזקה $[a-\delta, a+\delta]$ שבה f חזקה.

הוכחה

טינה $\epsilon = \frac{f(a)}{2}$ נבחר. $\delta < \epsilon$ טינה $|x-a| < \delta$.

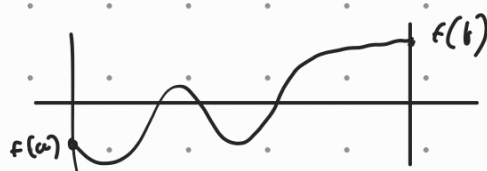
זוהי $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. $f(x) \geq f(a) - |f(a) - f(x)| > f(a) - \frac{1}{2}f(a) > 0$.
 טינה חזקה

משפט דניסון

תהי $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ כזיכר.

טינה $f(a) < 0$ ו- $f(b) > 0$. f חזקה $c \in (a, b)$.

כך $f(c) = 0$.



(1)

הוכחה המשפט

$$H = \{x \in [a, b] \mid f(y) < 0 \quad \forall y \in [a, x]\}$$

קיים $\delta > 0$ כך $a + \delta \in A$ כי מהלמה (מיתוס) לרציבות קצת.

קיים סביבה ימנית של a שבה f שלילי.

מיתוס סיבה קיים סביבה כך $a + \delta \in A$.

A קבוצה לפי ביקור חסומה מכל צד δ .

יש קיים δ - A חסם גלוי $c \in (a, b)$.

נבחר c והבטוח $f(c) < 0$ קיים δ כך, מהלמה.

קיים $\delta > 0$ כך $f(x) < 0$ לכל $x \in [c - \delta, c + \delta]$.

לכן $c - \delta \in A$ לפי $f(x) < 0$ לכל $x \in [a, c - \delta]$.

לכן $f(x) < 0$ לכל $x \in [a, c + \delta]$.

ולכן $c + \delta \in A$ בהתאם להיות c חסם מכל צד של a .

כעת נניח בהפך $f(c) > 0$ מיתוס. קיים $\delta > 0$.

כך $f(x) > 0$ לכל $x \in [c - \delta, c + \delta]$ $\Leftrightarrow c - \delta \notin A$.

$\Leftarrow$ $c - \delta$ חסם מכל צד של A , בהתאם להיות c חסם הימני.

כל $f(c) = 0$ קיים (מיתוס).

(2)

הוכחה המשפט

נניח f היא פונקציה רציפה על $[a, b]$.

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] = \begin{cases} [\frac{a_n+b_n}{2}, b_n] & f(\frac{a_n+b_n}{2}) < 0 \\ [a_n, \frac{a_n+b_n}{2}] & f(\frac{a_n+b_n}{2}) > 0 \end{cases} \quad \text{ולכן } [a_1, b_1] = [a, b]$$

$$|b_{n+1} - a_{n+1}| = \frac{1}{2} |b_n - a_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$$

טוב, מהלמה של קצת $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c$ מכיון f רציפה.

בנוסף, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(c)$ ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = f(c)$ מכיון f רציפה.

מכיון f רציפה, $f(c) = 0$ ו- $f(a_n) < 0$ ו- $f(b_n) > 0$ לכל n .

לכן $0 \leq \lim_{n \rightarrow 0} f(b_n) = f(c) = \lim_{n \rightarrow 0} f(a_n) \leq 0$ כלומר $f(c) = 0$ כמחויב.

הערה

(1) המשפט גם נכון אם $f(a) > 0$ ו- $f(b) < 0$.

(2) אם f רציפה על $[a, b]$ ו- $\alpha \in \mathbb{R}$ כך $f(a) < \alpha < f(b)$ אז

יש קיימת $c \in (a, b)$ כך $f(c) = \alpha$.

שני (שני) סלילים

הוכחת המשפט

בסתירה. $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty$ ולכן $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty$ וכן.

המחיר נמוך (כן)

הוכחה המעלה

שמן קבוע μ קיים ϵ כזה, $\ll$ $\int_a^b f(x) dx < \infty$ $\forall x \in [a, b]$

$$\Leftrightarrow \alpha - f(x) > 0, \text{ אז } \alpha - f > 0 \text{ בקרבת } x \text{ נקבע } \frac{1}{\alpha - f} \text{ קצב}$$

מטריקס (מטריקס) $\frac{1}{\alpha - f}$ וינצ'ל לטוב

$$\text{קיים } \epsilon > 0 \text{ כך } \frac{1}{\alpha - f(x)} < M \text{ לכל } x.$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{M} < \alpha - f(x) \Leftrightarrow f(x) < \alpha - \frac{1}{M} \text{ לכל } x.$$

הסתירה לעיל α פחות מ- α והוא $\frac{1}{M}$ הקצב f עכשיו.

(2) הוכחת המשפט

α סוכרי. α קבוצה α פחות מ- α .

מנוכחות הסוכרי, לכל $n \in \mathbb{N}$ קיים $a < x_n < b$

$$\alpha \geq f(x) > \alpha - \frac{1}{n} \text{ עכשיו}$$

קיים x_n (x_n) מתכנסת $\alpha \leq c \leq b$ (מבולגריה וייר (אנטי-))

$$\alpha \geq f(x_n) > \alpha - \frac{1}{n_n} \text{ , אז}$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \alpha & f(c) = \alpha & \alpha \end{array}$$