

תצבורה: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ קיים וסופי, והתצבורה טועה - $e = 2.7182$

בשיעור זה נרדסק דטר התבונן $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ שמוכ $x \in \mathbb{R}$

לענה

בהינתן $x \in \mathbb{R}$, הטבעי $a_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ מוגדרת עבור n

מספיק, כלומר

הוכחה: לענה

נקבע $N \geq |x|$, $N = \lceil |x| \rceil$, עבור $n > N$:

$$|x| < N \Leftrightarrow -N < x < N \Leftrightarrow -1 < \frac{x}{n} < 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{x}{n} + 1 \quad (*)$$

נקבע סדרה סופית בעלת $n+1$ איברים, $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 1 + \frac{x}{n}$, $b_{n+1} = 1$

אז נניח שני טעמים: הממוצע ישר:

$$(*) \quad \sqrt[n+1]{b_1 \cdot \dots \cdot b_{n+1}} \leq \frac{b_1 + \dots + b_{n+1}}{n+1} \\ \Downarrow \\ \sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n} \leq \frac{n \left(1 + \frac{x}{n}\right) + 1}{n+1} = 1 + \frac{x}{n+1}$$

נראה שיש הטענה בחדות $n+1$ ונקבע:

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1} \\ \Downarrow$$

$$a_n \leq a_{n+1}$$



לענה

בהינתן $x \in \mathbb{R}$, הסדרה $a_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ חסומה מלמעלה.

הוכחה:

מספיק להוכיח חסימות עדיין ו n בצל מספיק בטווח סילואיזיה במקום

קיים N כך שעדיין לכל $n \geq N$ מתקיים $-1 < \frac{x}{n} < 1$.

נציג n כסדר סדרה טורית בטורק $N+n+1$ טיפוס:

$$b_1 = \dots = b_n = 1 + \frac{x}{n}, \quad b_{n+1} = \dots = b_{n+N+1} = \frac{1}{N+1}$$

טור ממוצע:

$$\sqrt[n+N+1]{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \left(\frac{1}{N+1}\right)^{N+1}} \leq \frac{n \cdot \left(1 + \frac{x}{n}\right) + \frac{N+1}{N+1}}{n+N+1} = \frac{n+x+1}{n+N+1} < 1$$

נחלק את הטורק $n+N+1$ ונקבל:

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \left(\frac{1}{N+1}\right)^{N+1} < 1$$

$\Downarrow$

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n < (N+1)^{N+1}$$



ולכן לכל n , $a_n < (N+1)^{N+1}$ הסדרה חסומה.

מסקנה

עבור $x \in \mathbb{R}$ קיים $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

הצגה: $\exp(x)$ הפונקציה הטריקספוננציאלית ההיפוטטזה:

$$\exp(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

כאשר $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ בלתי פתוח $x \mapsto \exp(x)$

הצגה:

• $\exp(x) = 1, x=0$ עתה

• $\exp(x) = e, x=1$ עתה

הצגה

עתה $\exp(x) \geq 1+x, x \in \mathbb{R}$

הוכחה:

בהינתן x , $a_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ ניקח $n > |x|$ חזרתי

יש $\frac{x}{n} > -1$ ואם n נים $\frac{x}{n} > -1$ $\frac{x}{n} > -1$ $\frac{x}{n} > -1$

אם $\exp(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \geq 1 + \frac{x}{n} = 1+x$ כנתיב:

הצגה

עתה $\exp(x) > 0, x \in \mathbb{R}$

הוכחה:

הוכחנו $\exp(x) \geq 1+x$ $\frac{x}{n} > -1 \Leftrightarrow n > x$ $\frac{x}{n} > -1$

ולכן $a_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n > 0$ וקבוצת מספרים שליליים איננה ריקה

לכן $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n > 0$ נקבע, כן, נקבע

למה?

עבור $x \in \mathbb{R}$ בדיקו, $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 1$, $c_n = \left(1 + \frac{x}{n^2}\right)^n$ הוכח

הוכחה:

$$c_n = \left(1 + \frac{x}{n^2}\right)^n = \left(\left(1 + \frac{x}{n^2}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a_{n^2}}$$

a_{n^2} מתכנסת, כי היא חסומה, ולכן $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 1$

ובכן $\sqrt[n]{m} \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \sqrt[n]{M}$ עבור $m, M > 0$



$$c_n = \sqrt[n]{a_{n^2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

למה?

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}, \quad x \in \mathbb{R}$$

הוכחה:

מכיוון $\exp(x) > 0$ ו- $\exp(-x) > 0$ נקבע, כן, נקבע

$$\exp(x) \cdot \exp(-x) = 1$$

לכן $x > 0$ בדיקו, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$ ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = e^{-x}$

$$\exp(x) \cdot \exp(-x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n = 1$$

$$\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y), \quad x, y \in \mathbb{R}$$

הוכחה:

מקרה ראשון: $x, y \geq 0$

$$1 + \frac{x+y}{n} \leq \left(1 + \frac{x}{n}\right) \left(1 + \frac{y}{n}\right) = 1 + \frac{x+y}{n} + \frac{xy}{n^2} \leq \left(1 + \frac{x+y}{n}\right) \left(1 + \frac{xy}{n^2}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\left(1 + \frac{x+y}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{x+y}{n}\right)^n \left(1 + \frac{xy}{n^2}\right)^n$$

$$\downarrow \lim_{n \rightarrow \infty}$$

$$\exp(x+y) \leq \exp(x) \cdot \exp(y) \leq \exp(x+y) \cdot 1$$

מקרה שני: $x, y \leq 0$ נניח $x, y \geq 0$ אז $-x, -y \geq 0$ ונניח $x, y \leq 0$ אז $-x, -y \geq 0$

$$\exp(x) = \exp(x+y-y) \stackrel{\text{מקרה 1}}{=} \exp(x+y) \cdot \exp(-y) = \frac{\exp(x+y)}{\exp(y)}$$

$$\downarrow$$

$$\exp(x) \cdot \exp(y) = \exp(x+y)$$

מקרה שלישי: $x+y \leq 0$ אז $-x-y \geq 0$ ונניח $x, y \leq 0$ אז $-x, -y \geq 0$ ונניח $x, y \geq 0$ אז $-x, -y \leq 0$

מקרה רביעי: $x+y \geq 0$ אז $-x-y \leq 0$ ונניח $x, y \geq 0$ אז $-x, -y \leq 0$ ונניח $x, y \leq 0$ אז $-x, -y \geq 0$

$$\exp((-x)+(-y)) = \exp(-x) \exp(-y)$$

$\downarrow$

$$\frac{1}{\exp(x+y)} = \frac{1}{\exp(x)} \cdot \frac{1}{\exp(y)}$$

$\downarrow$

$$\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$$

מקנה רביע': $x+y < 0$ וגם $x+y > 0$ x y $-x$ $-y$ $x+y$ $x-y$ $-x-y$ $-x+y$

אכן $\exp$ המקנה הרטיון:

$$\exp((-x) + (-y)) = \exp(-x) \exp(-y)$$

$$\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$$

מסקנה

$$\exp\left(\sum_{i=1}^m x_i\right) = \prod_{i=1}^m \exp(x_i), \quad x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}$$

הוכחה המסקנה

הטורצוקציה $\exp$ (הענה) הקובציה

הענה

$$\exp(n) = e^n \quad n \in \mathbb{Q}, \quad \frac{m}{n} = v \in \mathbb{Q}$$

הוכחה: הענה

$$x_1 = \dots = x_m = 1 \quad m \in \mathbb{N}$$

$$\exp(m) = \prod_{i=1}^m \exp(1) = e^m$$

$$x_1 = \dots = x_m = \frac{1}{m} \quad m \in \mathbb{N}$$

$$e = \exp(1) = \exp\left(\sum_{k=1}^m \frac{1}{m}\right) = \prod_{i=1}^m \exp\left(\frac{1}{m}\right) = \exp\left(\frac{1}{m}\right)^m$$

$$e^{-m} = \exp\left(-\frac{1}{m}\right)$$

$$x_1, \dots, x_m = \frac{1}{n}$$

רצף

$$m, n \in \mathbb{N}$$

$$\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$$

רצף

$$\exp\left(\frac{m}{n}\right) = \exp\left(\sum_{i=1}^m \frac{1}{n}\right) = \prod_{i=1}^m \exp\left(\frac{1}{n}\right) = \prod_{i=1}^m e^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{m}{n}}$$

המשפט

המשפט

המשפט

$$\exp\left(-\frac{m}{n}\right) = \frac{1}{\exp\left(\frac{m}{n}\right)} = e^{-\frac{m}{n}}$$

המשפט

$$\exp(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, \quad e = \exp(1)$$

$$(1) \quad \forall x \quad \exp(x) > 0$$

$$(2) \quad \forall x \quad \exp(x) \leq 1 + x$$

$$(3) \quad \forall x \quad \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$$

$$(4) \quad \forall x, y \quad \exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$$

$$(5) \quad \forall r \in \mathbb{Q} \quad \exp(r) = e^r$$