למה

יהי $g: A \to \mathbb{R}$ גזירה ב-a וגם $g(a) \neq 0$, אז $\frac{1}{g}$

גזירה ב-a ומתקיים $\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{g^2(a)}$

הוכחת הלמה:

נתון כי $\lim\limits_{t \to a} \frac{g(t)-g(a)}{t-a} = g'(a)$

מכיוון ש-g גזירה ב-a, היא רציפה ב-a (הוכח) כמו כן,

מכיוון g רציפה ב-a ו- $g(a) \neq 0$, אזי קיימת סביבה $(a-\delta, a+\delta)$

שבה g שונה מאפס. אז לכל $t \in (a-\delta, a+\delta)$ נציב:

$$\Delta_{1/g, a}(t) = \frac{\frac{1}{g(t)} - \frac{1}{g(a)}}{t-a} = \frac{g(a)-g(t)}{g(t) \cdot g(a) \cdot (t-a)} = -\underbrace{\frac{1}{g(t) \cdot g(a)}}_{\lim\limits_{t\to a} = \frac{1}{g^2(a)}} \cdot \underbrace{\frac{g(t)-g(a)}{t-a}}_{\lim\limits_{t \to a} = g'(a)}$$

מסקנה

יהיו f, g גזירות ב-a, ו- $g(a) \neq 0$, אז $\frac{f}{g}$ גזירה ב-a ו-

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) g'(a)}{g^2(a)}$$

הוכחת המסקנה:

מהלמה הקודמת + כלל לייבניץ.

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)' = f' \cdot \left(\frac{1}{g}\right) + f \cdot \left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{f(a) \cdot g'(a)}{g^2(a)} + \frac{f'(a)}{g(a)} = \text{מכנה משותף}$$

משפט (כלל השרשרת)

אם f גזירה ב-a, ו-g גזירה ב-$f(a)$, אז:

$g\circ f$ גזירה ב-a ומתקיים $(g\circ f)'(a) = g'(f(a))\cdot f'(a)$

הוכחת המשפט

$$\Delta_{g\circ f,a}(t) = \frac{g\circ f(t) - g\circ f(a)}{t-a} = \underbrace{\frac{g(f(t))-g(f(a))}{f(t)-f(a)}}_{\Delta_{g,f(a)}(f(t))} \cdot \underbrace{\frac{f(t)-f(a)}{t-a}}_{\Delta_{f,a}(t)}$$

בעיה: אין ערובה לכך ש-$f(t) \neq f(a)$ בסביבה של a.

נתון ש-g גזירה ב-$f(a)$, כלומר $\lim_{z\to f(a)} \frac{g(z)-g(f(a))}{z-f(a)}$ קיים.

נגדיר
$$\psi(z) = \begin{cases} \frac{g(z)-g(f(a))}{z-f(a)} & z\neq f(a) \\ g'(f(a)) & z = f(a) \end{cases}$$
. $\psi(z)$ זו פונקציה רציפה ב-$f(a)$.

יהי $t\neq a$. אם $f(t)\neq f(a)$, אז $\Delta_{g\circ f,a}(t) = \psi(f(t))\cdot\Delta_{f,a}(t)$

אם $f(t)=f(a)$, אז $\underset{\overset{\|}{0}}{\Delta_{g\circ f,a}(t)} = \psi(f(t))\cdot \underset{\overset{\|}{0}}{\Delta_{f,a}(t)}$

כלומר, לכל $t\neq a$ $\Delta_{g\circ f,a}(t) = \psi(f(t))\cdot\Delta_{f,a}(t)$

$$\lim_{t\to a}\Delta_{g\circ f,a}(t) = \lim_{t\to a}\psi(f(t))\cdot\Delta_{f,a}(t) = \lim_{t\to a}\psi(f(t))\cdot\lim_{t\to a}\Delta_{f,a}(t) \underset{\text{רציפות}}{=} \psi(f(a))\cdot f'(a) =$$

$$= g'(f(a))\cdot f'(a)$$

דוגמאות:

$f(x)=\sin(x)$, $g(x)=x^2$

1. $(g\circ f)(x)=\sin^2 x$, $(g\circ f)'(x)=\underbrace{2\sin(x)}_{g'(f(x))}\cdot\underbrace{\cos(x)}_{f'(x)}$

2. $(f\circ g)(x)=\sin(x^2)$ $(f\circ g)'(x)=\cos(x^2)\cdot 2x$

הגדרת קרתיאודורי לגזירות

f גזירה ב-a אמ״מ קיימת פונקציה $S_{f,a}$ רציפה ב-a

כך ש- $f(t)=f(a)+\varphi(t)(t-a)$ ונסמן $f'(a)=\varphi(a)$

דוגמה:

$f(x)=x^2$. $t^2=f(t)=f(a)+\underbrace{(t+a)}_{\varphi(t)}(t-a)$

מכיוון ש- $S_{f,a}$ רציפה בa לפי קרתיאודורי f גזירה ב-a.

ומתקיים $f'(a)=\varphi(a)=2a$

הוכחה חלופית לכלל לייבניץ

נתון f,g גזירות ב-a.

אז קיימות φ_f , φ_g רציפות כך שלכל t

$f(t)=f(a)+\varphi_f(t)(t-a)$, $g(t)=g(a)+\varphi_g(t)(t-a)$

$$f(t)\cdot g(t) = f(a)\cdot g(a) + \underbrace{\left(f(a)\varphi_g(t) + g(a)\cdot\varphi_f(t) + \varphi_f(t)\cdot\varphi_g(t)(t-a)\right)}_{F(t)}(t-a)$$

מאריתמטיקה של רציפות F רציפה ב-a ולכן:

$$(f\cdot g)'(a) = F(a) = f(a)\cdot g'(a) + f'(a)\cdot g(a)$$

נקודות קיצון

תזכורת: לפונקציה רציפה f על קטע סגור קיימות נקודות מינימום ומקסימום.

תזכורת: יהי $f: A \to \mathbb{R}$, $a \in A$ נקראת **נקודת מקסימום גלובלית** מתקיים $f(a) \geq f(x)$ לכל $x \in A$.

הגדרה: תהי $f: A \to \mathbb{R}$. $a \in A$ נקראת **נקודת מקסימום מקומית** אם קיימת סביבה U של a שהיא בתחום ההגדרה כך ש- $f(a) \geq f(x)$ לכל $x \in U$.

משפט פרמה

אם f נקודת מקסימום (מינימום) מקומית של a, ו- f גזירה ב-a אזי $f'(a) = 0$.

הוכחת המשפט

מהנתון ש a נקודת מקסימום מקומית, קיים $\delta > 0$ כך ש-

$f(a) \ge f(t)$ לכל $a-\delta \le t \le a+\delta$

לכן, לכל $t \ne a$ בסביבה זו:

$$\Delta_{t,a}(t) = \frac{f(t)-f(a)}{t-a} \begin{cases} \ge 0 & t<a \\ \le 0 & t>a \end{cases}$$

לכן, $f'(a^-) \ge 0$ וגם $f'(a^+) \le 0$ ובגלל השוויון $f'(a) = 0$.

משפט רול

תהי f רציפה בקטע הסגור $[a,b]$ וגזירה בקטע הפתוח (a,b).

1. $f(a) = f(b)$ אז קיימת $c \in (a,b)$ כך ש- $f'(c) = 0$.

הוכחת המשפט

מעקרון המינימום/מקסימום קיימות בקטע הסגור נקודות מינימום ומקסימום. אם לפחות אחת משתי הנקודות בקטע, אז הנגזרת בנקודה זו מתאפסת. מש"ל.

אחרת. אם נקודות המינימום/מקסימום היחידות הן נקודות הקצה הפונקציה קבועה ונגזרת 0 בכל נקודה.