משפט הערך הממוצע (של לגרנז')

אם f רציפה ב- $[a,b]$ וגזירה ב- (a,b)

אז קיימת $c\in(a,b)$ כך ש- $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

"השיפוע הממוצע"

הוכחת המשפט

נגדיר $h:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$, $h(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$

h רציפה ב- $[a,b]$ וגזירה ב- (a,b) (מאריתמטיקה).

$h(a)=f(a)$, $h(b)=f(a)$.

אז h מקיימת את תנאי משפט רול, ולכן קיימת $c\in(a,b)$ כך ש- $f'(c)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=h'(c)=0$

ולכן $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

טענה

תהא $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ גזירה, $f'(x)=0$ לכל $a<x<b$

אז f פונקציה קבועה.

הוכחת הטענה:

תהא $c\in(a,b)$. נוכיח שלכל $x\in(a,b)$, $f(x)=f(c)$.

יהי $x\in(a,b)$. ממשפט הערך הממוצע קיימת d בין c ל- x

כך ש- $f'(d)=\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$

מהנתון ש- $f'(d)=0$ נובע ש- $f(x)=f(c)$

דוגמה ב: (טעימה ממשוואות דיפרנציאליות)

נזכיר: הפונקציה $\exp$ גזירה ו- $\exp'=\exp$.

נניח ש- $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ גזירה ומקיימת לכל x:

$f(x)=-6f(x)$ (משוואה דיפרנציאלית). $f(0)=3$ (תנאי התחלה)

<u>טענה:</u> $f(x)=3\cdot\exp(-6x)$.

<u>הוכחה:</u> נתון לכל x $\quad f'(x)+6f(x)=0$

$$\Downarrow$$

$$\exp(6x)f'(x)+\exp(6x)\cdot f(x)=0$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\exp(6x)\cdot f(x)\right)'=0$$

כלומר קיים c כך ש- $\exp(6x)\cdot f(x)=c$ לכל x.

$$\Downarrow$$

$$f(x)=c\cdot\exp(-6x)$$

$$\Downarrow \text{ נציב } x=0$$

$$c\cdot 1=3$$

ולכן $f(x)=3\cdot\exp(-6)$

מסקנה

יהיו $f,g:(a,b)\to\mathbb{R}$ גזירות לכל x, ו- $f'(x)=g'(x)$ לכל x.

אז קיים $c\in\mathbb{R}$ כך שלכל x $f(x)=g(x)+c$.

הוכחת המסקנה:

נתבונן ב- $h=f-g$. $h:(a,b)\to\mathbb{R}$.

מאריתמטיקה של נגזרות $h'(x)=0$ לכל x. ולכן קיים $c\in\mathbb{R}$

כך ש- $f(x)-g(x)=h(x)=c$ לכל x, כלומר $f(x)=g(x)+c$.

מסקנה

יהי $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $f'(x)>0$ לכל x, אז f עולה ממש.

הוכחת המסקנה:

נקבע ב- $x_1<x_2$ בתחום ההגדרה.

ממשפט הערך הממוצע קיים $x_1<c<x_2$ כך ש- $0<f'(c)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{\underbrace{x_2-x_1}_{>0}}$

ולכן $f(x_2)-f(x_1)>0 \Rightarrow f(x_2)>f(x_1)$

שאלה

יהי $f'(a)>0$, האם נכון ש- f עולה בסביבה של a? לא נכון!

דוג מטו:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$ גזירה בכל מקום.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)\cdot -\frac{1}{x^2} = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

כלומר $\lim_{x\to 0} f'(x)$ לא קיים, f' אינה רציפה ב-0.

מפורסם דומה:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ x & x = 0 \end{cases}$$

גזירה בכל מקום, $f'(0) = 1$ (והיא לא עולה בסביבה!)