שאלה

האם קיימת פונקציה גזירה בכל מקום שנגזרתה אינה רציפה?

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

גזירה לא רציפה ב-0.

$$f'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \lim_{t \to 0} \frac{t^2 \sin\frac{1}{t}}{t} = 0$$

$$\forall x \neq 0 \quad f'(x) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

אך $\lim_{x \to 0} f'(x)$ לא קיים. כלומר יש לה אי רציפות מהסוג השני.

הערה

אם f מוגדרת בסביבה של $a \in \mathbb{R}$, ונניח:

- f יורדת בסביבה שמאלית של a. (לא מנוקבת)
- f עולה בסביבה ימנית של a. (לא מנוקבת)

אז a היא נקודת מינימום מקומית של a.

למה

אם f מוגדרת בסביבה של a ומתקיים:

(א) $f'(a) = 0$ (ב) $f''(a) > 0$

< 0

אז a נקודת מינימום מקומית של f.

מקסימום

הערה

מהנתונים נובע ש-f' מוגדרת בסביבה של a. ולכן f רציפה בסביבה של a. וגם f' רציפה ב-a.

הוכחת הטענה:

$$0 < f''(a) = \lim_{t\to a} \Delta_{f',a}(t) = \lim_{t\to a} \frac{f'(t) - \overset{0}{\overset{\shortparallel}{f'(a)}}}{t-a}$$

מקיום הגבול ומחיוביות, קיימת סביבה מנוקבת של a שבה $\Delta_{f',a}$ חיובית.

כלומר קיים $\delta > 0$ כך שלכל $0<|t-a|<\delta$ מתקיים $0 < \frac{f'(t)}{t-a}$

ולכן $a < t < a+\delta \Rightarrow t-a > 0 \Rightarrow f'(t) > 0 \Rightarrow$ f עולה ממש

$a-\delta < t < a \Rightarrow t-a < 0 \Rightarrow f'(t) < 0 \Rightarrow$ f יורדת ממש

לכן a נק' מינימום.

מסקנה

אם f גזירה פעמיים ב-a, ו-a היא נקודת מינימום מקומית,

אז $f''(x) \geq 0$ (הכיוון השני לא נכון (לא <0))

בכיוון אחד זה $<$

בכיוון שני זה $\leq$

הוכחת המסקנה:

ממשפט פרמה, $f'(a)=0$. בשלילה נניח ש- $f''(a)<0$. שוב מהמשפט

הקודם, a נקודת מקסימום מקומית, ונתון שהיא גם מינימום!

כלומר f קבועה מקומית $\Leftarrow$ $f'(x)=0$ מקומית $\Leftarrow$ $f''(a)=0$ בסתירה.

סימון

$\boxed{\text{״לנגזרת אין אי רציפות סליקה״}}$

משפט

תהי f גזירה בסביבה מנוקבת של a, ורציפה בסביבה.

של a (לא מנוקבת) והגבול $\lim_{x\to a} f'(x)$ קיים.

אזי: (1) f גזירה ב-a. (2) f' רציפה ב-a $\left(f'(a)=\lim_{x\to a} f'(a)\right)$

הוכחת המשפט:

מהנתון, קיימת סביבה מנוקבת של a שבה $\{x \mid 0<|x-a|<\delta_1\}$ f' מוגדרת.

נסמן $\lim_{x\to a} f'(x)=l$. צ״ל: $f'(a)=l$. צ״ל: $\lim_{t\to a} D_{f,a}(t)=l$

לכל $0<|t-a|<\delta$ $D_{f,a}(t)=\frac{f(t)-f(a)}{t-a}$

נשים לב: f רציפה בקטע הסגור בין t ל-a.

f גזירה בקטע הפתוח בין t ל-a.

ממשפט הערך הממוצע, לכל t קיים c_t בין t ל-a

כך ש- $f'(c_t) = \frac{f(t)-f(a)}{t-a}$.

מהנתון, לכל $\varepsilon>0$ קיים $0<\delta<\delta_1$ כך ש:

$$0<|t-a|<\delta \Rightarrow |f'(t)-l|<\varepsilon.$$

$$\Downarrow$$

$$0<|c_t-a|<\delta \Rightarrow |f'(c_t)-l|<\varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$\left|\frac{f(t)-f(a)}{t-a}-l\right|<\varepsilon$$

כלומר $f'(a)=l$. כי $\lim_{t\to a}\frac{f(t)-f(a)}{t-a}=l$

משפט הערך הממוצע (של קושי)

תהיינה f,g רציפות בקטע $[a,b]$ וגזירות בקטע (a,b)

אזי קיימת $c\in(a,b)$ כך ש- $g'(c)\big(f(b)-f(a)\big) = f'(c)\big(g(b)-g(a)\big)$.

הוכחת המשפט:

נגדיר $h:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ כך: $h(x)=f(x)\big(g(b)-g(a)\big)-g(x)\big(f(b)-f(a)\big)$

h מקיימת את אותן תכונות רציפות/גזירות כמו f,g.

$$h(a)=f(a)\cdot g(b)-f(a)\cdot g(a)-g(a)\cdot f(b)+g(a)\cdot f(a)$$

$$\parallel$$

$$h(a)=f(b)\cdot g(b)-f(b)\cdot g(a)-g(b)\cdot f(b)+g(b)\cdot f(a)$$

h מקיימת את הנחות של משפט רול, ולכן קיימת

$c \in (a,b)$ כך ש- $h'(c) = 0$.

$$h'(c) = f'(c)\big(g(b) - g(a)\big) - g'(c)\big(f(b) - f(a)\big) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$f'(c)\big(g(b) - g(a)\big) = g'(c)\big(f(b) - f(a)\big)$$