כלל לופיטל

(משפט) (הוא בכלל של ברנולי לול)

יהיו f,g מוגדרות בסביבה מנוקבת של a, אם:

1. $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.
2. f,g גזירות בסביבה מנוקבת של a.
3. $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ קיים.

אז, $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

דוגמאות:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$

$f(x) = \sin(x)$, $g(x) = x$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$

$f'(x) = \cos x$, $g'(x) = 1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\cos(0)}{1} = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

$f(x) = 1-\cos x$, $g(x) = x^2$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$

$f'(x) = \sin x$, $g'(x) = 2x$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2} \Longrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

3 $f(x)=mx$, $g(x)=nx$

$$\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{m}{n}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}$$

הוכחת המשפט:

למה: מספיק להוכיח את המשפט עבור f,g רציפות ב-a.

הוכחה: יהיו f,g כמו בהנחות של משפט לופיטל. נגדיר:

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases}f(x) & x\neq a\\ 0 & x=a\end{cases}\qquad \tilde{g}(x)=\begin{cases}g(x) & x\neq a\\ f(x) & x=a\end{cases}$$

אם $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ קיים, אז $\lim_{x\to a}\frac{\tilde{f}'(x)}{\tilde{g}'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

לכן אם לופיטל מתקיים עבור $\tilde{f},\tilde{g}$, אז

$$\lim_{x\to0}\frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)}=\lim_{x\to0}\frac{\tilde{f}'(x)}{\tilde{g}'(x)}=\text{קיים}=\lim_{x\to0}\frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}$$

הוכחת המשפט:

נתון ש-$\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}$ קיים (נקרא לו l)

לכן קיימת סביבה מנוקבת של a שבה $g'(x)\neq0$.

ניתן להסיק מכך שבפרט בסביבה זאת g לא מתאפסת,

שכן אחרת ממשפט רול היה מוצא ש-g' מתאפסת.

בסביבה זו $\frac{f(x)}{g(x)}$ מוגדרת. לכל $x\neq a$ בסביבה כזו:

ממשפט הערך הממוצע של קושי, קיימת c_x בין a ל-x כך ש-

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\overset{0}{\overset{\shortparallel}{}}f(x)-f(a)}{g(x)-\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{g(a)}} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$$

מהנתון, לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך ש- $0<|x-a|<\delta$

$\Leftarrow$ $\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - l\right| < \varepsilon$.

אז לכל x המקיים $0<|x-a|<\delta$ מתקיים:

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - l\right| = \left|\frac{f'(c_x)}{f'(c_x)} - l\right| < \varepsilon$$

כי גם $0<|c_x-a|<\delta$

$\boxed{\text{כלל לופיטל}}$ 2.0 אלקטריק בוגלו

יהיו f,g מוגדרות בסביבה שנקובה של a, אם:

1. $\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.
2. f,g גזירות בסביבה מנוקבת של a.
3. $\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ קיים.

אזי, $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

כלל לופיטל 3.0

יהיו f,g מוגדרות בסביבה מנוקבת של a, אם:

① $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$.

② f,g גזירות בסביבה מנוקבת של a.

③ $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ קיים.

אז, $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$.