דיון

ל- $\exp$ יש עוד התכונה המאוד המאוד מיוחדת $\exp'(x) = \exp(x)$

למה

לכל $-\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}$, $1+x-2x^2 < \exp(x) < 1+x+x^2$

הוכחת הלמה

לכל $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$, לכל $n \in \mathbb{N}$ נתבונן ב- $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$

$$\left|\left(1+\frac{x}{n}\right)^n - (1+x)\right| \le \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} \left(\frac{x}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\left(\frac{x}{n}\right)^k < x^2\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2^{n-2}}\right) < 2x^2$$

$$\Downarrow$$

$$1+x-2x^2 < \left(1+\frac{x}{n}\right)^n < 1+x+2x^2$$

$$\Big\downarrow{\scriptstyle n\to\infty}$$

$$1+x-2x^2 \le \exp(x) \le 1+x+2x^2$$

טענה

$\exp$ גזירה ב-0 , $\exp'(0) = 1$.

הוכחת הטענה:

לכל $t \neq 0$:
$$D_{\exp,0}(t) = \frac{\exp(t)-\exp(0)}{t-0} = \frac{\exp(t)-1}{t}$$

ומהלמה לכל $-\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2}$:
$$t-2t^2 \le \exp(t)-1 \le t+2t^2$$

ולכן $0 < t < \frac{1}{2}$:
$$1-2t \le \frac{\exp(t)-1}{t} \le 1+2t$$

$\lim_{t\to 0^+} (1+2t) = 1$, $\lim_{t\to 0^+} (1-2t) = 1$ ולכן מסנדוויץ' $\lim_{t\to 0^+} \frac{\exp(t)-1}{t} = 1$

כמו כן, לכל $-\frac{1}{2} < t \le 0$:

$$\underset{\downarrow t\to 0^-}{1+2t} \le \underset{\downarrow t\to 0^-}{\frac{\exp(t)-1}{t}} \le \underset{\downarrow t\to 0^-}{1-2t}$$

$$1 \qquad 1 \qquad 1$$

ומכיוון ששני הגבולות החד"צ קיימים ושווים:

$$\exp'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{\exp(t)-1}{t} = 1$$

טענה

לכל $a\in\mathbb{R}$, $\exp'(a) = \exp(a)$

הוכחת הטענה:

$$D_{\exp,a}(t) = \frac{\exp(t)-\exp(a)}{t-a} = \frac{\exp(a)\exp(t-a)-\exp(a)}{t-a} = \exp(a)\frac{\exp(t-a)-1}{t-a} =$$

$$= \exp(a)\cdot\frac{\exp(t-a)-\exp(0)}{(t-a)-0} = \exp(a)\cdot D_{\exp,0}(t-a)$$

נגדיר $g(z) = D_{\exp,0}(z)$, $f(t) = t-a$

$\lim_{t\to a} f(t) = 0$, $\lim_{z\to 0} g(z) = \exp'(0) = 1$ וקיימת סביבה מנוקבת של a שבה $f(t)\neq 0$. לכן מהרכבת גבולות:

$$\lim_{t\to a} D_{\exp,0}(t-a) = \lim_{t\to a} g\circ f(t) = 1$$

ולכן: $\exp'(a) = \lim_{t\to a} D_{\exp,a}(t) = \lim_{t\to a} \exp(a)\cdot 1 = \exp(a)$

טענה

$\exp(x)$ היא הפונקציה היחידה שמקיימת:

$$\begin{cases} f'(x) = f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

הוכחת הטענה:

עבור פונקציה גזירה, כאשר $f(0)=1$, $f'(x)-f(x)=0$, אזי:

$$f'(x)\cdot \exp(-x) - f(x)\cdot \exp(-x) = 0$$

נסמן $g(x)=\exp(-x)$, אז מתקיים שזה ↑ שווה ל $(f\cdot g)'(x)$

ולכן קיים c קבוע כך ש $f(x)\exp(-x)=c$

$$\Downarrow$$
$$f(x)=c\cdot \exp(x)$$
$$\Downarrow$$
$$1=f(0)=1\cdot c$$
$$\Downarrow$$
$$c=1$$

לכן $f(x)=\exp(x)$

הערה:

נניח ש- f גזירה ב- a ו- f^{-1} גזירה ב- $b=f(a)$.

מתקיים $x = f^{-1}(f(x))$. מכלל השרשרת:

$$(f^{-1})'(\underbrace{f(a)}_{b})\cdot f'(a)=1$$
$$\Downarrow$$
$$(f^{-1})'(b)=\frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

מסקנה: אם $f'(a)=0$ אז f^{-1} אינה גזירה ב- $f(a)$.

משפט

תהי f רציפה והפיכה בסביבה של a. נתון ש f גזירה ב- a.

ו- $f'(a)\neq 0$ אזי f^{-1} גזירה ב- $b=f(a)$. ומתקיים $(f^{-1})'(b)=\frac{1}{f'(a)}$

הוכחת המשפט:

$$\Delta_{f^{-1},b}(t)=\frac{f^{-1}(t)-f^{-1}(b)}{t-b}=\frac{f^{-1}(t)-a}{f(f^{-1}(t))-f(a)}=\frac{1}{\frac{f(f^{-1}(t))-f(a)}{f^{-1}(t)-a}}=\Delta_{f,a}(f^{-1}(t))$$

$\neq 0$ מההנחה כי $t\neq b$

$$f^{-1\,\prime}(b)=\lim_{t\to b}\Delta_{f^{-1},b}(t)=\lim_{t\to b}\frac{1}{\Delta_{f,a}(f^{-1}(t))}=\frac{1}{f'(a)\neq 0}$$

ולפי $\lim_{t\to b} f^{-1}(t)=f^{-1}(b)=a$

ממשפט הרכבה של גבולות, כל התנאים מתקיימים.

דוגמאות

1. $\tan:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\longrightarrow\mathbb{R}$, $\tan^{-1}=\arctan:\mathbb{R}\longrightarrow\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

$$\tan'(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$\arctan'(x)=\frac{1}{\tan'(\arctan x)}=\cos^2(\arctan(x))=\frac{1}{1+(\tan(\arctan x))^2}=\frac{1}{1+x^2}$$

2. $$\ln'(x)=\frac{1}{\exp'(\ln x)}=\frac{1}{\exp(\ln x)}=\frac{1}{x}$$

3. יהי $n\in\mathbb{N}$, $f(x)=x^n$, $f^{-1}(x)=\sqrt[n]{x}$, $x>0$.

$$(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}=\frac{1}{n\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}}=\frac{1}{n}\cdot x^{\frac{1}{n}-1}$$

מסקנה: נתבונן ב- $f(x)=x^r$, $r\in\mathbb{Q}=\frac{n}{m}$, $f(x)=\left(x^{1/m}\right)^m$

$$f'(x) = m\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{m-1} \cdot \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m}{n}-1} = n \cdot x^{n-1}$$ ולכן

(4) $\sin: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow (-1, 1)$.

$$(\arcsin)'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-(\sin(\arcsin))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

משפט דארבו

תהא $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ גזירה, כולל קיום נגזרות חד-צדדיות בקצוות.

אז לכל y בין $f'(a^+)$ ל- $f'(b^-)$ קיימת $c \in (a,b)$

כך ש- $f'(c) = y$. (למרות שהנגזרת לאו דווקא רציפה)

הערה:

אם f' רציפה ב- (a,b) זו מסקנה מיידית ממשפט ערך הביניים.

הוכחת המשפט:

בה"כ נניח ש- $f'(b^-) < f'(a^+)$. ויהי $f'(b^-) < y < f'(a^+)$

נתבונן בפונקציה $g: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $g(x) = f(x) - y \cdot x$

ל- g אותן תכונות רציפות וגזירות כמו ל- f .

$g'(a^+) = f'(a^+) - y > 0$, , $g'(b^-) = f'(b^-) - y < 0$

g רציפה בקטע סגור ולכן מקבלת מקסימום.

$$g'(a^+) = \lim_{t\to a^+} \frac{g(t)-g(a)}{t-a} > 0$$

קיימת סביבה ימנית של a שבה $g(t) > g(a)$ ולכן a אינו

נקודת מקסימום. משיקול דומה b אינה נקודת מקסימום.

לכן קיימת נקודה $c \in (a,b)$ שבה $g'(c)=0$ (מעקרון המקסימום)

כלומר מההגדרה של g $\quad f'(c)-y=0$

$$\Downarrow$$

$$f'(c)=y$$

הערה: לא המקרה שקיימת נקודה שבה $f'(x)=0$!

דוגמה:

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

f גזירה בכל מקום, f אינה רציפה ב-0. $f'(0)=0$.

עובדה: בכל קטע (גם כש-0 בו) המשרד יש גבול.