

פולינום טיילור

הצגה 3.2.7: תהי f פונקציה n פעמים דיפרנקיבלית בנקודה a .

הפולינום טיילור של f ממעלה n סביב a נכתב:

$$P_{f,n,a}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k = f(a) + f'(a) \cdot (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

הערה 3.2.7:

יחסית נוסח נוסף $\rightarrow$ $\mathcal{P}_n$ הוא מרחב וקטורי ממעלה n של פולינומים.

לכל פונקציה f וכל נקודה a , $P_{f,n,a} \in \mathcal{P}_n$.

$$P_{f,n,a}^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) \quad 0 \leq k \leq n$$

דוגמה 3.2.7.1:

$$P_{\sin,n,0,0} = ?$$

(1)

$$\sin(0) = 0, \quad \sin'(0) = 1, \quad \sin''(0) = 0, \quad \sin'''(0) = -1, \quad \sin^{(4)}(0) = 0, \quad \sin^{(5)}(0) = 1$$

$$P_{\sin,n,0,0} = 0 + 1(x-0) + \frac{0}{2!}(x-0)^2 + \frac{-1}{3!}(x-0)^3 + \frac{0}{4!}(x-0)^4 + \frac{1}{5!}(x-0)^5 =$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

$$P_{\ln,n,1,1} = ?$$

(2)

$$\ln(1) = 0, \quad \ln'(x) = \frac{1}{x}, \quad \ln''(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad \ln^{(3)}(x) = \frac{2}{x^3}, \quad \ln^{(4)}(x) = -\frac{3!}{x^4}, \quad \ln^{(5)}(x) = \frac{4!}{x^5}$$

$$P_{f,n,5,1}(x) = 1 \cdot (x-1) - \frac{1}{2} (x-1)^2 + \frac{1}{3} (x-1)^3 - \frac{1}{4} (x-1)^4 + \frac{1}{5} (x-1)^5$$

הנחה

תהי f פונקציה n פעמיים דיפרנציאבילה ב- a , ויהי:

$$P'_{f,n,a}(x) = P_{f',n-1,a}(x)$$

הוכחה

$$\begin{aligned} (P_{f,n,a}(x))' &= \left(\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right)' = \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot k \cdot (x-a)^{k-1} = \sum_{l=0}^{n-1} \frac{f^{(l+1)}(a)}{l!} (x-a)^l = \sum_{l=0}^{n-1} \frac{f^{(l)}(a)}{l!} (x-a)^l \\ &= P_{f',n-1,a}(x) \end{aligned}$$

העברת אינדקס סכימה: $k = l+1$

לדעת

תהי f פונקציה n פעמיים דיפרנציאבילה ב- a , ויהי:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - P_{f,n,a}(x)}{(x-a)^n} = 0$$

הוכחה (המשפט):

$$P_{f,1,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) \quad : n=1 \quad \text{פונקציה}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x-a} - f'(a) \right) = 0$$

המשפט המקורי מההצבה הנלכדת.

נניח C קבוצה סגורה וחסומה, a נקודה בקבוצה, g פונקציה

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - P_{g,k,a}(x)}{(x-a)^k} = 0$$

כאשר k מספר טבעי ו- a נקודה

הרבי f לציג u כדמיון u $\sim$ a , f' לציג K

כדמיון, f' מקיטור יורדת f' הסינטיקציה.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x) - P_{f',k,p}(x)}{(x-a)^k} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - P_{f,k+1,a}(x)}{(x-a)^{k+1}} = 0$$

* כולל $a \rightarrow x$ המורה והמנה $\sqrt{\text{מטוס}}$.

המנה $f'(x) - P'_{f,k+1,a}(x) = f'(x) - P'_{f',k,a}(x)$ היא:

המנה $(x-a)^{k+1}$ היא:

$$\frac{1}{(k+1)} \cdot \frac{f(x) - P_{f',k,a}(x)}{(x-a)^k} = \frac{\text{מנה}'}{\text{מנה}'}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\text{מנה}'}{\text{מנה}'} = 0$$

מנה $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\text{מנה}}{\text{מנה}} = 0$ N $\int$ $\int$ $\int$

13 ~ 14

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^5} = 0$$

$$P_{\sin,1,0}(x) = x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - (x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120})}{x^5} = 0$$

$$P_{\sin,3,0}(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

הערה:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - P_{f,n,a}(x)}{(x-a)^k} = 0 \quad \text{wenn} \quad k \leq n \quad \int, \int$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - P_{f,n,\omega}(x)}{(x-a)^n} = 0 \quad (*)$$

תהייה f, g מוגדרות מסביבה $\int_a^b$, n נטות f, g

۱۷ م :

א	א'א	ח	יג	כ	כח	ל
---	-----	---	----	---	----	---

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - g(x)}{(x-a)^n} = 0$$

(המשל) מקובל מוכח e f שיהיה n

$(a \sim n) \quad 230 \quad .30 \quad .31 \quad \text{m}^{112} \quad p_{f,n,a} \quad .1 \quad f \quad 51''$

١١٨٢

עין 37 כ3 330 n סגיר a ר1ט1 יחס שקילות, כלומר:

• כל רבויקציה שווה לזוגות דג כגון חסביה וט (כסל קיטויט)

ס'מ' כ"ה - נוב' 1947

• ארבעה ימים - שבת, ראשון, חג המולד, יום כיפור

למרה

טור $P, Q \in \mathcal{M}_n$ והם שווים לכל x בסביבת a כל עוד n מספיק גדול.

טור $P(x) = Q(x)$ לכל x .

הוכחה

נכתוב $Q(x) = d_0 + d_1(x-a) + \dots + d_n(x-a)^n$, $P(x) = c_0 + c_1(x-a) + \dots + c_n(x-a)^n$

$P(x) - Q(x) = (c_0 - d_0) + (c_1 - d_1)(x-a) + \dots + (c_n - d_n)(x-a)^n$

נבחן $\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x) - Q(x)}{(x-a)^k} = 0$ עבור $0 \leq k \leq n$

עבור $k=0$: $c_0 = d_0 \iff 0 = \lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x) - Q(x)}{(x-a)^0} = \frac{c_0 - d_0}{1}$

עבור $k=1$: $c_1 = d_1 \iff 0 = \lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x) - Q(x)}{(x-a)^1} = c_1 - d_1$

ומכאן $c_k = d_k$ לכל k עד n .

מסקנה

אם $Q \in \mathcal{M}_n$ ו- a קבוע, אז $\exists \delta > 0$ ו- $\epsilon > 0$ כך ש- $P_{\epsilon, n, a} \subset \mathcal{M}_n$ לכל x בסביבת a .

$Q = P_{\epsilon, n, a}$ לכל x בסביבת a .

הוכחה: המסקנה

נניח $Q \in \mathcal{M}_n$ ו- a קבוע. נגדיר $P_{\epsilon, n, a} \in \mathcal{M}_n$ ו- $\delta > 0$ ו- $\epsilon > 0$ כך ש- $P_{\epsilon, n, a} \subset \mathcal{M}_n$ לכל x בסביבת a .

הערה:

38 f $\in \mathcal{P}_n$ Q $n < N$ $Q(x) = \sum_{k=0}^n b_k (x-a)^k \in \mathcal{P}_n$ n

39 n Q $\mathcal{P}_n$

40 f $\in \mathcal{P}_n$ Q $\mathcal{P}_n$ $Q(x) = \sum_{k=0}^n b_k (x-a)^k$

41 $Q \in \mathcal{P}_n$ $n < N$ $[Q]_n = \sum_{k=0}^n b_k (x-a)^k$

42 $Q \in \mathcal{P}_n$ $[Q]_n$ f $\in \mathcal{P}_n$ n

$\mathcal{P}_n$

43 n f $\in \mathcal{P}_n$ n f $\in \mathcal{P}_n$

$$p_{f,g,n,a} = [p_{f,n,a} \cdot p_{g,n,a}]_n$$

44 $\mathcal{P}_n$

$$f(x) = h_n(1+x) \cdot s_n(x)$$

$$p_{h_n(1+x),3,0}(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}, \quad p_{s_n,3,0} = x - \frac{x^3}{6}$$

$\Downarrow$

$$p_{f,3,0} = \left[\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right) \left(x - \frac{x^3}{6} \right) \right]_n = x^2 - \frac{x^3}{2}$$

הוכחה: $\mathcal{P}_n$

45 f, g $\in \mathcal{P}_n$ n $p_{f,n,a} \cdot p_{g,n,a}$ $\in \mathcal{P}_n$

(הוכחה: $\mathcal{P}_n$)

$$\frac{f(x) \cdot g(x) - p_{f,n,a}(x) \cdot p_{g,n,a}(x)}{(x-a)^n} = \frac{f(x) \cdot g(x) - p_{f,n,a}(x) \cdot p_{g,n,a}(x) + f(x)p_{g,n,a}(x) - f(x)p_{g,n,a}(x)}{(x-a)^n}$$

$$= \underbrace{f(x)}_{x \rightarrow a \downarrow f(a)} \underbrace{\frac{g(x) - p_{g,n,a}(x)}{(x-a)^n}}_{x \rightarrow a \downarrow 0} + \underbrace{p_{g,n,a}(x)}_{x \rightarrow a \downarrow g(a)} \underbrace{\frac{f(x) - p_{f,n,a}(x)}{(x-a)^n}}_{x \rightarrow a \downarrow 0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \left[f(x) \cdot \frac{g(x) - p_{g,n,a}(x)}{(x-a)^n} + p_{g,n,a}(x) \cdot \frac{f(x) - p_{f,n,a}(x)}{(x-a)^n} \right]$$

$$= \left[p_{f,n,a} \cdot p_{g,n,a} \right]_n \quad \text{we} \quad p_{f,n,a} \cdot p_{g,n,a} \quad p_{f,n,a}$$