משפט טיילור

תהי f גזירה $n+1$ פעמים בסביבה של a המכילה

את הקטע $[a,x]$. נסמן $R_{f,n,a}(x) = f(x) - P_{f,n,a}(x)$.

remainder
שארית

אז קיימת נקודה $a<c<x$ כך ש- $R_{f,n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\cdot(x-a)^{n+1}$

ההצגה של לגרנז' לשארית

דוגמא:

עבור $n=0$: $P_{f,n,a} = f(a)$

אז מלגרנז' קיים $a<c<x$ כך ש $\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)} = f'(c)$

ולכן $f(x)-f(a) = \frac{f'(c)}{1!}(x-a)$

הוכחת המשפט:

נגדיר פונקציה $\phi:[a,x] \longrightarrow \mathbb{R}$, כך:

קבוע

$$\phi(z) = f(x) - P_{f,n,z}(x) = f(x) - f(z) - f'(z)(x-z) - \dots - \frac{1}{n!}f^{(n)}(z)(x-z)^n$$

מתקיים: $\phi(a) = R_{f,n,a}(x)$

$$\phi(x) = 0$$

$$\phi'(z) = -f'(z) - f''(z)(x-z) + f'(z) - \dots - \frac{1}{n!}f^{(n+1)}(z)(x-z)^n + f^{(n)}(z)(x-z)^{n-1} = -\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(z)(x-z)^n$$

ממשפט הערך הממוצע של קושי, את ψ פונקציה גזירה (a,x)

ונציבתה לפי מתוספסת, יש קיימת נקודה $a < c < x$

כך ש $\frac{\phi'(c)}{\psi'(c)} = \frac{\phi(a)-\phi(x)}{\psi(a)-\psi(x)}$.

$$\Downarrow$$

$$R_{f,n,a}(x) = \phi(a) = \frac{\phi'(c)}{\psi'(c)}\left(\psi(a)-\psi(x)\right) = \frac{-1}{n!} f^{(n+1)}(c)(x-c)^n \frac{\psi(a)-\psi(x)}{f'(c)}$$

נבחר $\psi(z) = (x-z)^{n+1}$

$$R_{f,n,a}(x) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(c)(x-c)^n \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)(x-c)^n} = \frac{1}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}$$

דוגמה:

$f(x) = \exp(x)$. $P_{f,n,0} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$

ממשפט שלגר לכל $x>0$ קיים $0<c<x$ כך ש-

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{\exp(c)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

עבור $x=1$ קיימת $0<c<x$ כך ש-.

$$e = 1 + 1 + \frac{1^2}{2} + \dots + \frac{1^n}{n!} + \underbrace{\frac{\exp(c)}{(n+1)!}\cdot 1}_{\boxed{0 < R < \frac{3}{(n+1)!}}}$$

מסקנה:

e הוא אי-רציונלי.

הוכחת המסקנה:

נניח בשלילה ש- $e = \frac{p}{q}$, נבחר $n > \max\{q,3\}$ אז:

$e = \frac{p}{q} = 1+1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n!}+R$ כך ש- $0 < R < \frac{3}{(n+1)}$

מכאן: $\underbrace{e\cdot n!}_{\text{מספר שלם}} = n!\cdot\frac{p}{q} = \underbrace{n!+n!+\frac{n!}{2}+\dots+\frac{n!}{n!}}_{\text{שלמים}} + \underbrace{n!\cdot R}_{\text{לא שלם}}$

כך ש- $0 < R\cdot n! < \frac{3n!}{(n+1)!} = \frac{3}{n+1} < 1$

סתירה.